بسم الله الرحمن الرحیم

انالیز I

مشخصات کتاب:

نام کتاب: انالیز I

مؤلف : پوهنوال دوکتور محمد انور غوری

ترجمه به دری :

ادیتور :

کمپوزر :

سال چاپ : 1387

شماره چاپ:

تعداد چاپ :

فهرست مطالب

فصل چهارم : سلسله های ریاضی ....

فصل اول

سیستم اعداد حقیقی

مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی مانند تقارب، تمادیت، مشتقگیری، انتگرال پذیری، ترادفها، سلسله ها و غیره با اعداد حقیقی مربوط اند، بنابرین در شروع آنالیز باید سیستم اعداد حقیقی معرفی شود.

اعداد حقیقی بحیث یک ساحه الجبری بروشهای متفاوتی تعریف و مطرح شده میتواند که درین فصل با استفاده از ساده ترین میتودها ترجیحاً کلاسهای فرعی و متمم این اعداد معرفی و بررسی میشوند.

1. ست ها ی اعداد

اعداد طبیعی، اعداد تام، اعداد ناطق و اعداد غیر ناطق ستهای فرعی از اعداد حقیقی اند که درین پاراگراف مطرح و خواص آنها تحت مطالعه قرار میگیرند.

اعداد طبیعی $(Natural\ \ Numbers)$**.** ساده ترین اعداد مروج مانند 1و 2 و3 و 4 و ... را اعداد طبیعی می نامند و ست اعداد طبیعی عبارت است از

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$$

اعداد طبیعی را به نام اعداد تام مثبت نیز یاد می نمایند.

ست اعداد طبیعی تحت دو عملیه جمع و ضرب بسته است، یعنی حاصل جمع و حاصل ضرب هر جوره از اعداد طبیعی بازهم یک عدد طبیعی میباشد، بعبارت دیگر

$$\forall m,n\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad m+n\in\mathbb{N} \quad,\quad mn\in\mathbb{N}$$

اعداد کامل$(Whole\ Numbers)$. ست متشکل از تمام اعداد طبیعی به شمول صفر را اعداد کامل گویند که عبارت است از

$$\mathbb{N}^{*}=\{0,1,2,3,4,5,\cdots\}$$

ست اعداد کامل نیز تحت دو عملیه جمع و ضرب بسته است.

اعداد تام$(Integer\ \ Numbers)$. ست متشکل از اعداد کامل و اعداد تام منفی عبارت از ست اعداد تام است و قرار ذیل ارایه میگردد

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots\}$$

ست اعداد تام تحت سه عملیه جمع، تفریق و ضرب در $\mathbb{Z}$بسته است، یعنی جمع، تفریق و ضرب هر جوره از اعداد تام دو باره یک عدد تام است:

$$\forall m,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow m+n\in\mathbb{Z}\quad ,m-n\in\mathbb{Z},\quad mn\in\mathbb{Z}$$

تجزیه اعداد تام. اگر برای دو عدد تام n و d یکعدد تام k وجود داشته باشد طوریکه $n=kd$، درینصورت d قاسم (مقسوم علیه) n و n مضرب d گفته میشود و مینویسیم که d/n (میخوانیم که d عدد n را تقسیم میکند). اگر قاسم های عدد تام $n>1$ فقط 1 و n باشند در آن حالت n را عدد اول مینامند. عدد تامی که اول نباشد مرکب نامیده میشود. عدد1 نه اول است و نه مرکب.

بزرگترین قاسمهای مشترک دو عدد تام a و b را به (a,b) ارایه میکنیم. درصورتیکه $(a,b)=1$ باشد، گفته میشود که a و b نسبت به هم اول اند.

مثال *1*. اعداد اول و مرکب را در اعداد 13 ، 15، 29 و 60 تشخیص کنید.

حل: این اعداد را در حالت تجزیه مینویسیم.

$$13=13\times 1\quad ,\quad 15=3\times 5\quad ,\quad 29=1\times 29\quad ,\quad 60=2\times 2\times 3\times 5$$

پس اعداد13 و29 اول اند درحالیکه 15 و 60 اعداد مرکب میباشند.

مثال *2*. عوامل ضربی 60 را بنویسید.

حل: این عدد را به چند حالت تجزیه مینماییم

$$60=2\times 30\quad ,\quad 60=3\times 20\quad ,\quad 60=(-6)\times(-10)\quad ,\quad 60=2\times 2\times 3\times 5$$

و اما ست تمام قاسم های 60 عبارت است از

$$D(60)=\{\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5,\ \pm 6,\pm 10,\pm 12,15,\pm 20,\pm 30,\pm 60,\ \}$$

مثال *3*. بزرگترین قاسمهای مشترک $(3\,,5)$ ، $(12\,,15)$ ، $(20\,,30)$ و $(6\,,18)$ را بنویسید .

حل: دیده میشود که

$$(3,5)=1 \quad , \quad (12,15)=3 \quad , \quad (6,18)=6 \quad ,(20,30)=10$$

خواص تجزیه اعدادتام

1. هـرعدد تام خلاف 1، یکعدد اول است یا مرکب.
2. اگر a قاسمی از حاصل ضرب bc بوده و $(a,b)=1$، پس a قاسم c است.
3. هـرگاه عدداول p قاسم حاصل ضرب ab باشد، پس p قاسم a یاقاسم b است.
4. هرعددتام $n>1$ را میتوان صرف نظر از ترتیب عوامل، فقط بیک طریق بحیث حاصل ضرب اعداد ا ول ارایه نمود.

مثال 4. عدد 6 قاسم $60=5\times 12$ است، میبینیم که 6 قاسم 12 نیزمیباشد، درحالیکه $(5,12)=1$ است.

اعداد ناطق(نسبتی)$(Rational\ Numbers)$**.** اعدادیکه به حیث نسبت دو عدد تام ارایه شده بتوانند اعداد نسبتی نامیده می شوند. در اعداد نسبتی صفر به حیث مخرج (مقسوم علیه) غیر قابل ارایه است، ست اعداد ناطق عبارت است از

$$\mathbb{Q}=\left\{ x : x=\frac{m}{n} \ ,\ m \ ,\ n \in Z \ , n\neq 0 \right\}$$

هر عدد تام یک عدد ناطق است زیرا عدد تام به حیث کسری می باشد که مخرجش 1 است ست اعداد ناطق تحت سه عملیه جمع، ضرب، تفریق و بعلاوه اعداد ناطق خلاف صفر تحت عملیه تقسیم، بسته میباشد، یعنی

$$\forall x,y\in\mathbb{Q}\Rightarrow x+y\in\mathbb{Q}\ ,x-y\in\mathbb{Q}\ ,\ xy\in\mathbb{Q}\ ,\frac{x}{y}\in\mathbb{Q},y\neq 0$$

اعدادکسری. اعدای ناطقی که تام نباشند (مخرج آنهاخلاف 1 باشد) اعداد کسری اند و کسرهای که دارای مخرج های 10،100، 1000 و ... باشند، کسور اعشاری گفته میشوند.

مثال5. چند نمونه کسور اعشاری با طرز ارایه آنها عبارت اند از:

$$\frac{3}{10}=0.3 \quad , \quad \frac{27}{100}=0.27 \quad , \quad \frac{7}{1000}=0.007 \quad , \quad \frac{2371}{10000}=0.2371$$

کسرمتوالی. کسور اعشاری اینکه یک یا چند رقم بعد از اعشاری در آنها بـی نهایـت دفعـه تکرار شود، کسر اعشاری متوالی (دوره ای) نامیده میشود.

مثال6. دو نمونه کسور متوالی با طرز ارایه آنها قرارذیل اند:

$$0.333\cdots := 0.\overline{3} \quad , \quad 0.4\ \ 356\ \ 356\ \ 356\ \ \cdots\ =\ 0.4\ \ \overline{356}$$

کسرمتوالی بحیث عددناطق. هر عدد ناطق به حیث کسر اعشاری عادی یا متوالی ارایه شده می تواند و بر عکس هر کسر اعشاری محدود یا متوالی یک عدد ناطق است.

ثبوت. چون عدد نسبتی یک کسر عام است اگر صورت آن بر مخرجش تقسیم گردد کسر اعشاری عادی و یا متوالی حاصل می شود و در اینجا به چند نمونه اکتفا می کنیم

$$I. \quad \frac{1}{3}=0,33333...=0,\overline{3}$$

$$II. \quad \frac{3}{4}=0,7500 \quad ...$$

$$III. \quad \frac{12}{7}=1,714285\,714285...=1,\overline{714285}$$

$$IV. \quad 6=\frac{6}{1}=6,0000\ ...$$

بر عکس هر کسر متوالی را می توان بحیث کسر عام (عددناطق) کرد (مثال ذیل).

مثال 7. عدد متوالی $x=0,13\overline{547}$ را به کسرعام تبدیل میکنیم:

عدد مذکور را به نوبت با اعداد 100000 و 100 ضرب نموده از همدیگر تفریق می کنیم :

$$\begin{aligned} 100\,000x &= 13547,547\,547\,547\ldots \\ 100x &= 13,547\,547\,547\ldots \\ \hline 99900x &= 13534 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \Rightarrow \quad x = \frac{13534}{99900} = \frac{6767}{49950} \Rightarrow \quad 0,13\overline{547} = \frac{6767}{49950}$$

یادداشت. هرکسر اعشاری محدود را می توان به حیث کسر متوالی در نظر گرفت طوریکه ارقام متوالی اش صفر ها باشند.

اکنون سوالی مطرح می شود که آیا جذر های ازنوع $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ و غیره اعداد نسبتی اند یا خیر؟

بعضی جذرهابحیث اعدادغیرناطق. هرگاه n عدد طبیعی بوده و مربع کامل نباشد، در آنصورت $\sqrt{n}$ یکعدد ناطق نیست.

ثبوت. فرض کنیم $\sqrt{n}$ یک عدد ناطق باشد، بعد از اختصار این عدد شکل $\frac{p}{q}$ دارد، طوریکه p و q هیچ عامل مشترک ندارند، یعنی

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q}$$

بعد از مربع ساختن اطراف داریم که

$$(\sqrt{n})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow p^2 = nq^2 \quad \cdots \quad (i)$$

دیده می شود که p^2 بر n قابل تقسیم است بنابر این p نیز بر n قابل تقسیم بوده، می توان، $p = kn$ وضع نمود در این صورت رابطه (i) شکل ذیل را دارد

$$(kn)^2 = kq^2 \Rightarrow k^2n^2 = kq^2 \Rightarrow q^2 = kn^2$$

لهذا q^2 نیز بر n قابل تقسیم است، در نتیجه q نیز بر n قابل تقسیم بوده، صورت ومخرج کسر $\frac{p}{q}$ دارای عامل مشترک nم ی باشد و این خلاف فرضیه است. پس نتیجه می گیریم که $\sqrt{n}$ عدد نسبتی نیست •.

لهذا اعداد $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ و غیره نیز اعداد نسبتی نمی باشند هر گاه جذور متذکره استخراج شوند کسرهای اعشاری بدست می آیند که ارقام بعد از علامه اعشار در آنها ختم نشده و متوالی نیز نمیباشند. مثلاً

$$I.\sqrt{2}=1.41421413\cdots \quad , \quad II.\sqrt{3}=1.7320508\cdots \quad , \quad III.\sqrt{7}=2.6457513\cdots$$

هم چنین اعداد e و π نیز نسبتی نیستند:

$$IV\ .\ e = 2,7182818284\cdots \quad , \quad V\ .\ \pi = 3,1415926545\cdots$$

اعداد غیرناطق $(Irrational\ Numbers)$**.** اعـداد حقیقـی کـه نـاطق (نسـبتی نباشند؛ اعدادغیرناطق (غیرنسبتی) گفته میشوند، هرگاه این اعداد بشکل اعشاری ارائه شـوند، تعداد ارقام بعد از اعشاری در آنها نامتناهی بوده و متوالی نیز نمیباشند، اعداد غیرنـاطق دارای سمبول $\mathbb{Q}'$ بوده، عبارت اند از $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ ، π ، e و غیره.

اعداد حقیقی $(Re\ al\ Numbers)$**.** ست متشکل از اعداد ناطق و غیر ناطق عبارت از ست اعداد حقیقی است. ست اعداد حقیقی به سمبول $\mathbb{R}$ ارایه می گردد یعنی

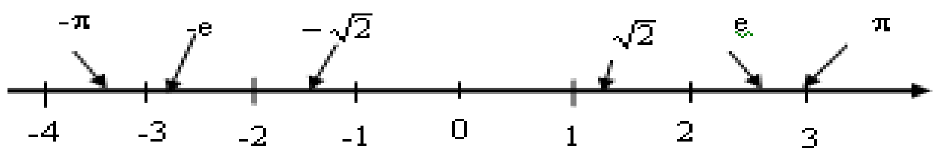
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

اعداد حقیقی نیز تحت سه عملیه جمع، تفریق، ضرب و اعداد حقیقی خلاف صفر تحت عملیه تقسیم بسته میباشد. واضح است که

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

محور اعداد حقیقی. مستقیم جهت داری که یک نقطه از آن به حیث مبداء (محل عدد صفر) قبول می گردد در نظر گرفته می شود، با در نظر داشت واحد قیاسی مناسب اعداد مثبت به سمت راست و اعداد منفی به سمت چپ از مبداء موقعیت می گیرند در این صورت برای

هر عدد حقیقی روی این مستقیم یک نقطه و بر عکس برای هر نقطه روی مستقیم یک عدد حقیقی تقابل میکند، این مستقیم را محور اعداد حقیقی می گویند



2 . خواص الجبری اعدادحقیقی

عملیه های الجبری جمع و ضرب در، ست اعداد حقیقی دارای خواص قابل توجه میباشند که درینجابه اختصارياد آوری میگردد.

اکسیوم های جمع

1. **بسته گی:** مجموع هر جوره‌ء اعداد حقیقی، یکعدد حقیقی است، یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}$$

2. **تبدیلی:** حاصل جمع دو عدد حقیقی مستقل از ترتیب انتخاب آنها ثابت است،

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y = y + x$$

3. **اتحادی:** برای اعدادحقیقی x ، y و x شرط ذیل صدق میکند

$$(x + y) + z = y + (x + z)$$

4. **موجودیت عنصرصفری:** مجموع هرعدد حقیقی با صفر عین عدداست، یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + 0 = x$$

5. **معکوس پذیری:** هر عدد حقیقی نظربه عملیه جمع دارای عنصر معکوس است یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}: \quad x + (-x) = 0$$

اکسیوم های ضرب

6. بسته گی: حاصل ضرب هر جوره‌ء اعداد حقیقی، یکعدد حقیقی است، یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy \in \mathbb{R}$$

7. تبدیلی: حاصل ضرب دو عدد حقیقی مستقل از ترتیب انتخاب آنها ثابت است،

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad xy = yx$$

8. اتحادی: برای اعداد حقیقی x ، y و x شرط ذیل صدق میکند

$$(xy)z = y(xz)$$

9. موجودیت عنصرواحد: حاصل ضرب هرعدد حقیقی با یک عین عدداست، یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1x = x$$

10. معکوس پذیری: هر عدد حقیقی نظربه عملیه ضرب دارای عنصر معکوس است یعنی

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^{-1} := \tfrac{1}{x} \in \mathbb{R}: \quad xx^{-1} = 1$$

اکسیوم توزیع ضرب درعملیه جمع: حاصل ضرب هر عدد حقیقی با مجموع دو عدد مساوی به مجموع حاصل ضرب همین عدد به هر یک آنهاست، یعنی

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x(y+z) = xy + xz$$

یادداشت: طور سیمبولیک بعضی افاده ها را میتوان قرار ذیل ارایه داد:

$$x + (-y) := x - y \ , \ x\left(\tfrac{1}{y}\right) := \tfrac{x}{y} \ , \ (x+y)+z := x+y+z$$

$$(xy)z := xyz \quad , \quad xx := x^2, \ xxx := x^3, \cdots, \underbrace{xxx\cdots x}_{n\ \text{دفعه}} = x^n$$

$$x + x := 2x \quad , \quad x + x + x := 3x \quad , \quad \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\ \text{دفعه}} := nx$$

قضیه: عملیه جمع در اعداد حقیقی دارای خواص ذیل است:

1. هـرگاه $x + y = x + z$ باشد ، پس $y = z$ است.
2. هـرگاه $x + y = x$ باشد، پس $y = 0$ است.
3. هـرگاه $x + y = 0$ باشد، پس $y = -x$ است.
4. برای هرعددحقیقی x تساوی $-(-x) = x$ صدق میکند.

ثبوت:

$$1.\quad x + y = x + z \Rightarrow -x + (x + y) = -x + (x + z)$$
$$\Rightarrow (-x + x) + y = (-x + x) + z \Rightarrow y = z \cdot$$
$$2.\quad x + y = x + z \Rightarrow -x + (x + y) = -x + x$$
$$\Rightarrow (-x + x) + y = (-x + x) \Rightarrow y = 0 \cdot$$
$$3.\quad x + y = 0 \Rightarrow -x + (x + y) = -x + 0$$
$$\Rightarrow (-x + x) + y = -x \Rightarrow y = -x \cdot$$
$$4.\quad -(-x) + (-x) = 0 \Rightarrow -(-x) = x \bullet$$

قضیه: عملیه ضرب در اعداد حقیقی دارای خواص ذیل است:

1. هـرگاه $x \neq 0$ و $xy = xz$ باشد، پس $y = z$ است.
2. هـرگاه $x \neq 0$ و $xy = x$ باشد، پس $y = 1$ است.
3. هـرگاه $x \neq 0$ و $xy = 1$ باشد، پس $y = \frac{1}{x}$ است.
4. برای $x \neq 0$ تساوی $1/(1/x) = x$ صدق میکند.

ثبوت :

$$1.\quad xy = xz \Rightarrow \tfrac{1}{x}(xy) = \tfrac{1}{x}(xz) \Rightarrow (\tfrac{1}{x}x)y = (\tfrac{1}{x}x)z \Rightarrow y = z \cdot$$
$$2.\quad xy = xz \Rightarrow \tfrac{1}{x}(xy) = \tfrac{1}{x}x \Rightarrow \tfrac{1}{x}xy = \tfrac{1}{x}x \Rightarrow y = 1 \cdot$$
$$3.\quad xy = 1 \Rightarrow \tfrac{1}{x}(xy) = \tfrac{1}{x} \cdot 1 \Rightarrow (\tfrac{1}{x}x)y = \tfrac{1}{x} \Rightarrow y = \tfrac{1}{x} \cdot$$
$$4.\quad \left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \bullet$$

یاد داشت: درعوض $\frac{1}{x}$ سیمبول x^{-1} بکار برده میشود.

نتیجه: برای اعداد حقیقی x ، y و z روابط ذیل برقرار است:

$$1.\ 0x = 0 \quad , \quad 2.\ x \neq 0 , y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$$

$$3. (-x)y = -(xy) = x(-y) \quad , \quad 4. (-x)(-y) = xy \ .$$

ثبوت:

$$1. \quad 0x + 0x = (0+0)x = 0x \Rightarrow 0x + 0x = 0x \Rightarrow 0x = 0$$

2. فرضاً $x \neq 0$ و $y \neq 0$ ، اما $xy = 0$ باشد ، درانصورت

$$xy = 0 \Rightarrow \left(\tfrac{1}{x}\right)\left(\tfrac{1}{y}\right)xy = 0 \Rightarrow \left[\left(\tfrac{1}{x}\right)x\right]\left[\left(\tfrac{1}{y}\right)y\right] = 0 \Rightarrow 1 = 0$$

نتیجه بدست آمده غیرممکن است ، پس $xy \neq 0$ است .

$$3. \quad (-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0 \Rightarrow (-x)y = -xy$$

بهمین قسم

$$x(-y) = (-y)x \Rightarrow (-y)x + yx = (-y + y)x = 0x = 0$$

$$\Rightarrow (-y)x = -yx \Rightarrow (-y)x = -xy \Rightarrow x(-y) = -xy$$

$$4. \quad (-x)(-y) = -\left[(x)(-y)\right] = -\left[-(xy)\right] = xy \bullet$$

خواص مساوات دراعدا دحقیقی

هر چند بعضی خاصیتهای اعداد معرفی شده، درینجا بازهم برای اعداد حقیقی x ، y و z دارای خواص ذیل را یادآوری میگردد:

1. خاصیت انعکاسی

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x$$

2. خاصیت تناظری

$$\forall x , y \in \mathbb{R} : x = y \Rightarrow y = x$$

3. خاصیت انتقالی

$$\forall x , y , z \in \mathbb{R} : x = y , y = x \Rightarrow x = z$$

4. خاصیت جمعی

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x = y \Leftrightarrow y + z = x + z$$

5. خاصیت ضربی

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x = y \Leftrightarrow yz = xz$$

6. خاصیت حذفی جمع

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : y + z = x + z \Rightarrow x = y$$

7. خاصیت اختصاری ضرب

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \ , z \neq 0 : yz = xz \Rightarrow x = y$$

ست ا عدادحقیقی بحیث ساحهء الجبری. چنانچه دیده شد، ست اعداد حقیقی نظربه عملیه های جمع وضرب دارای یازده خاصیت می باشد، هر ستی اختیاری که چنین خواصی داشته باشد یک فیلد (ساحه) الجبری گفته میشود و اعداد حقیقی نیز یک فیلد ا ست. ست های اعداد ناطق و مختلط نیز فیلدهای الجبری میباشند.

3. ترتیب اعداد حقیقی

اعداد حقیقی را نظر به مقدار آنها میتوان با همدیگر مقایسه نمود و رابطه کوچک بودن $(<)$ یا بزرگ بودن $(>)$ بنام رابطه ترتیب یاد میگردد، اعداد حقیقی با در نظرداشت ای رابطه بنام فیلد مرتب گفته میشود. بصورت عموم هر ست اختیاری و یا هر فیلد اختیاری مرتب نمی باشد.

رابطه ترتیب. دررابطه" $x < y$" گفته میشودکه " x کوچکتر از y " یا" x کمتراز y " و یا" x قبل از y " است، اغلب درعوض $x < y$ مینویسند $y > x$ نیز میتوان افاده نمود، که گفته میشود " yبزرگتر از x است " یا " yبیشتر از x است " ویا" y بعداز x است ".

چنانچه: $7 > 4$ ، $5 > 3$ ، $-5 < -2$ ، $0 < 3$ یا $6 > 2$.

رابطه $x \leq y$ حاکی ازان است که $x < y$ یا $x = y$ بدون تصریح یکی ازانهاست. البته مفهوم $x \leq y$ نقیض $x > y$ میباشد. مفاهیم $x \leq y$ و $y \geq x$ معادل همدیگر اند.

اکسیوم های ترتیب. اعداد حقیقی اکسیوم های ذیل را صدق میکند:

***1*.خاصیت سه گانه ای :** برای هر جوره اعداد حقیقی x و y فقط یکی از سه خاصیت ذیل صادق است

$$x < y \quad , \quad x = y \quad , \quad x > y$$

***2*. خاصیت انتقالی:**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$$

***3*. خاصیت جمعی:**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

***4*. خاصیت ضربی:**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \begin{cases} x > 0 \,,\, x < y \Rightarrow xz < yz \\ x < 0 \,,\, x < y \Rightarrow xz > yz \end{cases}$$

سیستم اعداد حقیقی با خواص قبلی و خواص ترتیب عبارت از یک فیلد مرتب است.

مفاهیم اعداد مثبت و منفی. عدد x را مثبت میگوییم اگر $x > 0$ و منفی مینامیم درصورتیکه $x < 0$. ست اعداد حقیقی مثبت را به $\mathbb{R}^{+}$و ست اعداد حقیقی منفی را با $\mathbb{R}^{-}$ ارایه مینمایند. واضح است که

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}$$

از اکسیوم اول ترتیب نتیجه میشود که در مقایسهء هر عدد حقیقی x با 0 میتوان نوشت:

$x < 0$ ، یا $x = 0$ ویا $x > 0$

بنابرین هر عدد حقیقی مثبت یا صفر و یا منفی است.

قضیه. برای اعداد حقیقی x، y و z و رابطه ترتیب خواص ذیل وجود دارد

***1*.** هرگاه $x > 0$ ، پس $-x < 0$ و بر عکس،

***2*.** هرگاه $x > 0$ و $y < z$ ، پس $xy < xz$،

***3*.** هرگاه $x < 0$ و $y < z$ ، پس $xy > xz$،

***4*.** هرگاه $x \neq 0$ ، پس $x^{2} > 0$،

5. هرگاه $0<x<y$ ، پس $0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$.

ثبوت :

$$1.\quad x>0\Rightarrow -x+x>-x+0\Rightarrow 0>-x\Rightarrow -x<0,$$

$$2.\quad x>0,\ y<z\Rightarrow z>y\Rightarrow z-y>y-y\Rightarrow z-y>0$$
$$\Rightarrow x\left(z-y\right)>0\Leftrightarrow xz-xy>0\Rightarrow xz>xy\Rightarrow xy<xz,$$

$$3.\quad x<0,\ y<z\Rightarrow -x>0,\ z>y\Rightarrow z-y>0$$
$$\Rightarrow\left(-x\right)\left(z-y\right)>0\Rightarrow\left(-x\right)z+\left(-x\right)\left(-y\right)>0$$
$$\Rightarrow xy-xz>0\Rightarrow xy-xz+xz>xz\Rightarrow xy>xz\ ,$$

$$4.\quad x\neq 0\Rightarrow\begin{cases}x>0 \quad\Rightarrow\quad xx>0\quad\Rightarrow\quad x^2>0\\ x<0\Rightarrow -x>0\Rightarrow\left(-x\right)\left(-x\right)>0\Rightarrow x^2>0\end{cases}\Rightarrow x^2>0$$

$$5.\quad\begin{cases}1>0,x>0\Rightarrow x\left(\frac{1}{x}\right)>0,\ x>0\Rightarrow\frac{1}{x}>0\\ 1>0,y>0\Rightarrow y\left(\frac{1}{y}\right)>0,\ y>0\Rightarrow\frac{1}{y}>0\end{cases}$$

حال اطراف رابطه $x<y$ را با عدد مثبت $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)$ضرب نموده میابیم که

$$x\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)<\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)y\Rightarrow\frac{1}{y}<\frac{1}{x}\ \bullet$$

مثال8. نشان دهید که برای اعداد حقیقی a و b طوریکه $a\leq b$ باشد، شرط $a\leq\frac{a+b}{2}\leq b$ صدق میکند.

حل:

$$\begin{rcases}a\leq b\Rightarrow a+b\leq b+b\Rightarrow a+b\leq 2b\Rightarrow\frac{a+b}{2}\leq b\\ a\leq b\Rightarrow a+a\leq a+b\Rightarrow 2a\leq a+b\Rightarrow a\leq\frac{a+b}{2}\end{rcases}\Rightarrow a\leq\frac{a+b}{2}\leq b$$

مثال9. ثبوت کنید که برای $a \geq 0$ و $b \geq 0$ اگر $a \leq b$ باشد،درانصورت $a^2 \leq b^2$ است .

حل:

$$a \leq b \Rightarrow \begin{matrix} b+a \geq 0 \\ b-a \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow (b-a)(b+a) \geq 0 \Rightarrow b^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \leq b^2$$

مثال10. (**نامساوات کوشی- شوارتز**).

ثبوت کنید که

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

ثبوت. برای تابع $y = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2 + (a_3 - b_3x)^2$ واضح است که $y \geq 0$. بعد از انکشا ف قوسها و ترتیب داریم

$$y = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)x + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

با تعویض $A = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ ، $B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ و $C = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ میابیم که

$$y = Ax^2 - 2Bx + C$$

چون $y = Ax^2 - 2Bx + C \geq 0$ است، بنابرین معادله

$$Ax^2 - 2Bx + C = 0$$

دو جذر مختلف داشته نمیتواند، بعبارت دیگر $\Delta = (-2B)^2 - 4AC \leq 0$ است، یعنی

$$(-2B)^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow B^2 - AC \leq 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$$

$$\Rightarrow (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \bullet$$

مثال11. ثبوت کنید که

$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2 \le \sqrt{a_1+a_2+a_3}+\sqrt{b_1+b_2+b_3}$$

حل: با درنظر داشت نامساوات کوشی- شوارتز داریم که

$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)+2\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=\left[\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\right]^2$$

از این جا بدست می اید که

$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+(a_3+b_3)^2 \le \sqrt{a_1+a_2+a_2}+\sqrt{b_1+b_2+b_3}$$

4. قیمت مطلق اعداد حقیقی

مفهوم قیمت مطلق. مطابق تعریف قیمت مطلق عدد حقیقی x عبارتست از

$$|x| = max\{x,-x\} = \begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

واضح است که

$$1.\quad -|x|\le x\le |x| \quad , \quad 2.\quad |x|^2=x^2 \quad , \quad 3.\quad |x|=\sqrt{x^2}$$

مثال12.

$$|0|=0\ ,\ |8|=8\ ,\ |-9|=9\ ,\ \left|\sqrt{3}-3\right|=3-\sqrt{3}$$

مسافه بین اعداد. مسافه بین دو عدد x و y عبارت از $d(x,y)=|x-y|$ است.

خواص قیمت مطلق. برای اعداد حقیقی x ، y و $a>0$ خواص ذیل صادق اند:

$$1.\quad |xy| = |x|.|y| \quad , \quad 2.\quad |x| = |-x| \quad , \quad 3.\quad \left|\tfrac{x}{y}\right| = \tfrac{|x|}{|y|}$$

$$4.\quad |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$$

$$5.\quad |x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a \ \vee \ x \le -a$$

$$6.\quad |x| - |y| \le |x+y| \le |x| + |y|$$

ثبوت

$$1.\quad |xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$$

$$2.\quad |-x| = |(-1)x| = |-1||x| = 1|x| = |x|$$

$$3.\quad \left|\tfrac{x}{y}\right||y| = \left|\tfrac{x}{y}y\right| = |x| = \tfrac{|x|}{|y|}|y| \Rightarrow \left|\tfrac{x}{y}\right| = \tfrac{|x|}{|y|}$$

$$4.\quad |x| < a \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ -x < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ x > -a \end{cases} \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$5.\quad |x| \ge a \quad \Leftrightarrow \quad x \notin (-a\,,\,a) \quad \Leftrightarrow \quad x \ge a \vee x \le -a$$

$$6.\quad (|x+y|)^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (|x|)^2 + 2xy + (|y|)^2$$

$$\le (|x|)^2 + 2|x||y| + (|y|)^2 = (|x| + |y|)^2 \Rightarrow (|x+y|)^2 \le (|x| + |y|)^2$$

$$\Rightarrow |x+y| \le |x| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \le |x+y| \le |x| + |y|$$

$$7.\quad |x| = |x - y + y| \le |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \le |x-y| = |x + (-y)|$$

$$\le |x| + |-y| = |x| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \le |x-y| \le |x| + |-y| = |x| + |y| \bullet$$

نتیجه. برای اعداد حقیقی x و y دو خاصیت ذیل صدق میکند.

$$1.\quad |x-y| = |y-x| \quad , \quad 2.\quad \big||x| - |y|\big| \le |x-y|$$

ثبوت

$$1.\quad |x-y| = |-(x-y)| = |-y+x| = |x-y|$$

$$2.\quad |x| = |x-y+y| \le |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \le |x-y| \quad \cdots \quad (i)$$

$$|y| = |y-x+x| \le |y-x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \le |x-y|$$

$$\Rightarrow\ -(|x|-|y|) \le |x-y| \quad \Rightarrow \quad |x|-|y| \ge -|x-y| \quad \cdots \quad (ii)$$

$$(i),(ii) \Rightarrow -|x-y| \le |x| - |y| \le |x-y| \Rightarrow \big|\, |x| - |y| \,\big| \le |x-y| \bullet$$

غـیرمساوات 13 مثال $|x+4| < 5$ راحل کنید .

حل :

$$|x+4| < 5 \Rightarrow -5 < x+4 < 5 \Rightarrow -5-4 < x < 5-4 \Rightarrow -9 < x < 1$$

مثال *14*. نامساوات $|2x-8| > 6$ راحل کنید .

حل :

$$|2x-8| > 6 \Rightarrow \begin{cases} 2x-8 > 6 \Rightarrow 2x > 6+8 \Rightarrow 2x > 14 \Rightarrow x > 7 \\ 2x-8 < -6 \Rightarrow 2x < -6+8 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

لهذا $x > 7$ و یا $x < 1$ حل غیر مساوات است .

مثال*15*.

$$(i)\quad |4| = 4 \qquad , \qquad (ii)\quad |-7| = -(-7) = 7$$

$$(iii)\quad |0| = 0 \qquad , \qquad (iv)\quad \left|1-\sqrt{11}\right| = \sqrt{11} - 1$$

$$(v)\quad |-3+4|=|2|=2<|-3|+|5|=8$$

$$(vi)\,|4+5|=|9|=9 \quad , \quad (vii)\left|\frac{-3}{7}\right|=\frac{3}{7}=\frac{|-3|}{|7|}$$

$$(viii)\quad |(-5)6|=|-30|=30=5\times 6=|-5|\cdot|6|$$

$$(ix)\quad |e-\pi|=\pi-e$$

مثال16.

$$1.\quad |2x+3|<6 \quad , \quad 2.\quad |x-1|<|x|$$

5.انتروال های اعدا د

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، طوریکه $a<b$، درینصورت انتروالهای اعداد قرار ذیل تعریف میشوند:

***1* ـ ا نتروال باز.** ست تمام اعداد حقیقی x واقع در بین a و b بنام انتروال باز از a تا b گفته میشود وآنرا به $(a\,,\,b)$ مینویسیم، یعنی

$$(a,b):=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$$

***2* ـ انتروال بسته.** ست تمام اعداد حقیقی x واقع در بین a و b بشمول a و b، بنام انتروال بسته از a تا b یاد میگردد و آنرا به $[a\,,\,b]$ مینویسیم، یعنی

$$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\}$$

بهمین قسم انتروالهای نیمه باز و یا نیمه بسته ذیلاً تعریف میشوند

***3* ـ انتروال نیمه بسته از راست (نیمه باز از چپ)**

$$(a,b]:=\{x\in\mathbb{R}: a<x\le b\}$$

4 ـ انتروال نیمه بسته از چپ (نیمه بازاز راست)

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$$

درهر یک ازحالات فوق اعداد a و b انجام های انتروال گفته میشوند. اگر در انجامهای انتروال مفاهیم ∞ ویا $-\infty$ واقع شوند، انجام مربوطه باز میباشد، بعبارت دیگر

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad , \quad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad , \quad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$$

تابع بایجکتیف. تابع $f : A \to B$ بین ست های A و B بایجکتی گفته میشود، اگریک بیک وسورجکستیف (پوششی) باشد.

شمارش پذیری ستها. یک ست رامتناهی گویند، اگرخالی بوده یادارای تعداد معین عناصر باشد. هرگاه بین ستهای A و $\mathbb{N}$ یک تابع بایجکتیف وجود داشته باشد، A را شمارش پذیر نا متناهی مینامند. بصورت عموم ست های متناهی و یا شمارش پذیر نامتناهی را بنام ستهای شمارش پذیر یاد میکنند.

مثال*17*. نشان دهید که ست اعداد جفت شمارش پذیر است.

حل: تابع $f(n) = 2n$ بین اعداد طبیعی و اعداد جفت بایجکتیف است، لذا این ست شمارش پذیراست.

قضیه قطری کانتور. انتروا ل $(0, 1)$ قابل شمارنیست.

ثبوت. فرکنیم ست $(0, 1)$ قابل شمارباشد، درانصورت تابع بایجکتیف $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$ وجود داردطوریکه

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0.\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14} \quad \cdots \\
f(2) &= 0.\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24} \quad \cdots \\
f(3) &= 0.\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\alpha_{34} \quad \cdots \\
&\vdots \\
f(i) &= 0.\alpha_{i1}\alpha_{i2}\alpha_{i3}\alpha_{i4} \quad \cdots
\end{aligned}
$$

حال میبینیم که عدد $0.\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}\cdots$ از انتروال بوده و در فهرست فوق نه آمده است، لهذا فرضیه درست نبوده انترول موصوف قابل شما نمیباشد●

قضیه. هرگاه $A \subset B$ باشد ، پس

(1) درصورتیکه ست B قابل شمارباشد، ست A نیز قابل شماراست .

(2) اگر ست A غیر قابل شمار باشد، ست B نیزغیرقابل شماراست .

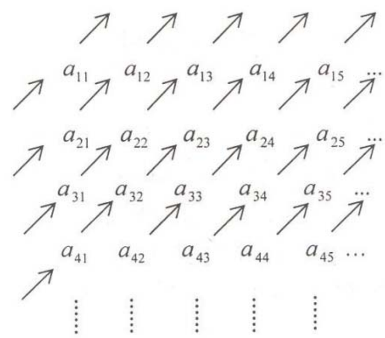
ثبوت بعهده شاگردان ست .

قضیه. هرگاه ستهای A_1، A_2، A_3 ،... شمارش پذیرباشند، پس اتحادآنها نیزشمارش پذیراست .

ثبوت. میتوان فرض کرد که تمام ست های فوق نامتناهی شمارش پذیراند، عناصرآنها را در سطور جدول ذیل ترتیب میدهیم، اکنون عناصر

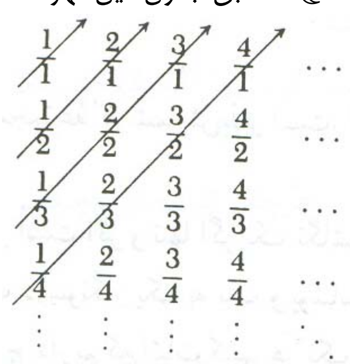
$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j := \left\{ x : \exists j \in \mathbb{N}, x \in A_j \right\}$$

را با درنظر داشت $A_j = \left\{ a_{jk} : k \in \mathbb{N} \right\}$ و قطرهای صعودی جدول ذیل میتوان شمارکرد.



قضیه. ست اعداد ناطق شمارش پذیر است.

ثبوت. اعدادناطق عبارت از اتحاد ست های اعداد ناطق مثبت، اعداد ناطق منفی و عدد صفر میباشد، یعنی $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}'$، نشان میدهیم که ست اعداد ناطق مثبت شمارش پذیراست. عناصر ست $\mathbb{Q}^{+}$ مطابق جدول ذیل فهرست میکنیم



حال تابع بایجکتیف $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^{+}$ راتوسط خطوط جهت دار در قطرهای جدول مدنظرمیگیریم:

$$f = \left\{ \frac{1}{1} , \frac{2}{1} , \frac{2}{2} , \frac{3}{1} , \frac{3}{2} , \frac{3}{3} , \frac{4}{1} , \frac{4}{2} , \frac{4}{3} , \frac{4}{4} , \dots \right\}$$

لهذا $\mathbb{Q}^{+}$شمارش پذیراست، بهمین قسم میتوان نشان داد که $\mathbb{Q}^{-}$ نیز شمارش پذیر بوده در نتیجه $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^{-}$ شمارش پذیر است●

6. محدودیت ستهای اعداد

سرحدات فوقانی و تحتانی (بالایی وپائینی). هرگاه A یک ست فرعی اعداد حقیقی باشد،

1. عدد حقیقی uرا سرحد بالایی ست A مینامند، در صورتیکه u از تمام عناصر A بزرگتر باشد، یعنی برای هر $a \in A$ شرط $a \leq u$ صدق نماید.

2. عدد حقیقی vرا سرحد بالایی ست A مینامند، درصورتیکه v از تمام عناصر A کوچکتر باشد، یعنی برای هر $a \in A$ شرط $a \geq v$ صدق نماید.

ستی که دارای سرحد بالایی باشد از طرف بالا محدود گفته میشود و ست دارای سرحد تحتانی از پائین محدود است. ستهای که از بالا و پائین محدود با شند بنام ستهای محدود یاد میشوند.

شکل ص *52* رضایی

مثال*18*. ست $A = (-8\ ,\ 9) \cup [20\ ,\ 61]$ دارای سرحدات بالایی و پائینی است؟ درصورت امکان سه سرحد بالایی و دو سرحد تحتانی آنرا بنویسید.

حل: ست A محدود است، سه سرحد بالایی آن بطورمثال عبارت انداز*65* ، *70* و*98*. بهمین قسم دو سرحد تحتانی ست A طور نمونه اعداد -9 و -15 میباشد.

مثال*19*. آیا ست اعداد طبیعی دارای سرحدات بالایی و پائینی است؟ بزرگترین سرحد تحتانی اعداد طبیعی چند است؟

حل: ست $\mathbb{N}$ از پایان محدود و از بالاغیر محدود است، کوچکترین سرحد پایانی اش عدد*1* میباشد.

سوپریموم وانفیموم. هرگاه A یک ست فرعی اعدادحقیقی باشد، درانصورت

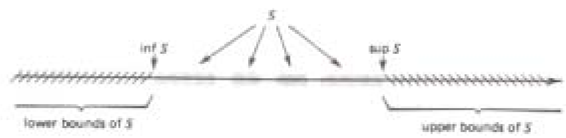
(1) اگر A از بالا محدود باشد، عدد u را سوپریموم A میگویند، در صورتیکه هیچ سرحد بالایی A از u کوچکتر نباشد، بعبارت دیگر u کوچکترین سرحد بالایی A است و می نویسیم

$$sup\ A = u$$

(2) اگر A از پایان محدود باشد، عدد v را انفیموم A میگویند، در صورتیکه هیچ سرحدپایانی A از v بزرگترنباشد، بعبارت دیگر v بزرگترین سرحد پائینیی A است و مینویسیم

$$inf\ A = v$$

اگرست A از بالا محدود نباشد در آن صورت $sup\ A = \infty$، بهمین قسم وقتی که ست A از پایان محدود نباشد $inf\ A = -\infty$ است.



مثال20. ست $A = (2\ ,\ 6) \cup (9\ ,\ 11)$ را درنظرگرفته $sup\ A$ و $inf\ A$ را بنویسید.

حل: دیده میشودکه $sup\ A = 11$ و $inf\ A = 2$ است.

مثال21. انفیموم و سوپریموم ست های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ را بنویسید.

حل: میبینیم که $inf(\mathbb{N}) = 1$ ، $sup(\mathbb{N}) = \infty$ ، $inf(\mathbb{R}) = -\infty$ و $sup(\mathbb{R}) = \infty$ است.

مثال22. سوپریموم و انفیموم هر یک از ست های ذیل در عین زمان عناصری از انها میباشد؟

$$A = (-1\,,\,6) \cup [8\,,\,23] \quad , \quad B = [0\,,\,9) \quad , \quad \mathbb{N}$$

حل: دیده میشود که

$$sup\,A = 23 \in A \quad , \quad inf\,A = -1 \notin A \quad , \quad sup\,B = 9 \notin B$$
$$inf\,B = 0 \in B \quad , \quad sup(\mathbb{N}) = \infty \notin \mathbb{N} \quad , \quad inf(\mathbb{N}) = 1 \in \mathbb{N}$$

اکسیوم تمامیت *(Completeness)*. هر گاه یک ست عددی خالی نبوده و سرحد بالایی داشته باشد، دارای سوپریموم متناهی است.

ازین اکسیوم نتیجه میشود که: اگر ست عددی خالی نبوده و سرحد پایانی داشته باشد، دارای انفیموم متناهی است.

اکسیوم تمامیت سیستم اعداد حقیقی برعلاوه یازده اکسیوم این سیسیتم دوازدهمین و آخرین اکسیومها و تکمیل کنندهء اعداد حقیقی میباشد.

کوچکترین و بزرگترین عناصرست های عددی. هرگاه A یک ست عددی بوده و $M = sup\,A$ شامل A باشد، درانصورت M را عنصر اعظمی آن مینامند و مینویسیم که $M = max\,A$ ، بعبارت دیگر

$$max\,A := M \Leftrightarrow sup\,A = M \in A$$

بهمین برتیب اگر $m = inf\,A$ شامل A باشد، درانصورت m را عنصر اصغری آن مینامند و مینویسیم که $m = min\,A$، بعبارت دیگر

$$min\,A := m \Leftrightarrow inf\,A = m \in A$$

مثال*23*. اعظمی و اصغری هر یک از ست های ذیل تعیین کنید.

$$A = (-1\,,\,6) \cup [8\,,\,23] \quad , \quad B = [0\,,\,9) \quad , \quad \mathbb{N}$$

حل: دیده میشود که

$$sup\,A = 23 \in A \Rightarrow max\,A = 23 \quad , \quad inf\,B = 0 \in B \Rightarrow min\,B = 0$$
$$inf(\mathbb{N}) = 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow min(\mathbb{N}) = 1$$

اما $min\,A$ ، $max\,B$ و $max(\mathbb{N})$ وجود ندارند.

توسعه اعداد حقیقی. ست توسعه یافته اعداد حقیقی بصورت $\mathbb{R}^{\infty} := \mathbb{R} \cup \{-\infty , \infty\}$ تعریف میگردد، منظور از سیستم توسعه یافته اعداد حقیقی عبارت از ست اعداد حقیقی به انضمام دو علامت ∞ و $-\infty$ میباشد که برای عدد حقیقی x خواص ذیل را صدق کند:

$$1. \quad x+\infty=\infty,\ x+(-\infty)=-\infty,\ x-(\infty)=-\infty,\ x-(-\infty)=\infty,\ \tfrac{x}{\infty}=\tfrac{x}{-\infty}=0$$

$$2. \quad x>0 \Rightarrow x(\infty)=\infty\ ,\ x(-\infty)=-\infty$$

$$3. \quad x<0 \Rightarrow x(\infty)=-\infty\ ,\ x(-\infty)=\infty$$

$$4. \quad \infty+\infty=(\infty)(\infty)=(-\infty)(-\infty)=\infty,\ -\infty+(-\infty)=(\infty)(-\infty)=-\infty$$

$$5. \quad -\infty<x<\infty$$

قضیه. هرگاه A و B ستهای عددی باشند طوریکه $A \subseteq B$، درانصورت

$$1. \quad \sup A \le \sup B \quad , \quad 2. \quad \inf A \ge \inf B$$

قانون ارشمیدس در اعداد حقیقی. برای هرعددناطق x عدد طبیعی n وجود دارد طوریکه $x<n$ است.

تراکم اعدادحقیقی. برای هرجوره اعداد حقیقی a و b در حالیکه $a<b$ است، یک عد ناطق r وجود دارد، طوریکه $a<r<b$ باشد. درینصورت میگویند که ست اعداد ناطق در، ست اعداد حقیقی متراکم (پهن) است.

7. اعدادتقریبی ومقدمات محاسبه

در محاسبات، ارایه اعداد حقیقی بحالت اصلی و کاربرد آنها بعضاً ناممکن است، مثلاً جهت محاسبه مساحت دایره نمیتوان عدد π را در حالت واقعی آن مطرح نمود، در چنین حالات قیمت های تقریبی اعداد با درنظرداشت خطاهای لازم و معین شده مورد استفاده قرار میگیرند. بنابرین محاسبات عملی عبارت از روشهای تطبیق اعداد تقریبی میباشد. درین پاگراف مقدمات این بحث به اختصار معرفی میشود.

ارایه اعــشاری اعداد حقیقی. ارایه اعداد حقیقی مثبت بحیث مجموعه مضرب های اعداد از نوع 10^n (در حالیکه n اعداد تام باشند) بنام ارایه اعشاری اعداد حقیقی یاد میشوند.

مثال24. اعداد 3257 و $68,496$ در سیستم اعشاری قرار ذیل ارایه میشوند:

$$3257 = 3\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0$$

$$68,496 = 6\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0 + 4\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2} + 6\cdot 10^{-3}$$

طوریکه دیده میشود در ین طرز نوشتن اعداد، رقم یک ها ماهیت مبدأً را از نظر توان دارد و سایر ارقام راست و چپ عدد 10 دارای توان های مثبت و منفی اند.

مثال 25

$$a.\quad 481,25 = 4\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2}$$

$$b.\quad 9,854 = 9\cdot 10^0 + 8\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-3}$$

$$c.\quad 10^{-6} = 0.000001$$

$$d.\quad 5\cdot 10^4 + 3\cdot 10^{-4} = 50000,0003.$$

ارایه علمی اعداد (*Scientific Notation*). عدد فوق العاده بـزرگ و یـا کوچـک A را بخاطر سهولت محاسبه بصـورت $A = a\cdot 10^n$ مینویسـند، در حالیکـه n عـدد تـام و $1 \le a < 10$ است. در ینجا a را مانتیس (ضمیمه) عدد A می گویند. طرز ارایه A بشـکل فوق بنام ارایه علمی آن یاد می گردد. مانتیس عدد در ارایه علمـی از مـانتیس لوگـارتم فـرق دارد.

مثال26. بعضی کمیت های معروف بصورت ارایه علمی قرار ذیل فهرست میشوند.

فاصله بین زمین و آفتاب	$10^{11} m$
کتله اتم هایدروجن	$5\cdot 10^{-11} kg$
کتله آفتاب	$2\cdot 10^{30} kg$
کتله زمین	$6\cdot 10^{24} kg$

کتله مهتاب	$(7,4)10^{22}\,kg$
شعاع زمین	$(6,4)10^{6}\,m$
مالیکولی پنسیلین	$5\cdot10^{-17}\,kg$

اعداد تقریبی. در محاسبات عملی اکثراً کمیت های قابل محاسبه طور مطلق و واقعی بدست آمده نمیتوانند، بنابرین قیمت های تقریبی آنها بدقت لازم محاسبه میشوند. عدد یکه بطور عملی و تخمینی عوض عدد واقعی ارایه می گردد بنام عدد تقریبی یاد میشود.

مثال *27*. اعداد 3.14 ، 3.141 و $3,1415$ قیمت های تقریبی از $\pi = 3.14159265$ اند.

مثال *28*. اعداد 2.72 ، $2,7183$ و $2,718281$، قیمت های تقریبی از عدد $e = 2,71828182$ میباشند.

دقت اندازه گیری. کمترین مقدار و یا کوچکترین واحد یکه در محاسبه مد نظر گرفته میشود، عبارت از دقت محاسبه (دقت اندازه گیری) می باشد، دقت اندازه گیری نظر به نوعیت محاسبه متفاوت است.

مثال *29*

نوع کمیت	کمیت تقریبی	د قـت محاسبه
نفـوس یک کشور	85 000 000 نفـر	یک ملیون نفـر
نفـوس یک شهـر	358 000 نفـر	یک هـزار نفـر
نفـوس یک قریه	5 900 نـفـر	یکصد نفـر
وسعت یک حویلی	1483 متر مربع	یک مترمربع
وزن یخچال	18,7 کیلوگرام	دهـم حصهء کیلوگرام
وزن انگشتر طلا	6,94 گرام	صد م حصهء گرام
وزن نگین الماس	1,253 گرام	هـزارم حصهء گرام

دیده میشود که دقت محاسبه با در نظر داشت کمیت مربوط و نوعیت محاسبه ده ده واحد ترقی و تنزل دارد و در هر حالت دقت محاسبه عددی از نوع 10^n،$(n \in Z)$ میباشد.

خطای مطلق. تفاوت بین کمیت واقعی A از قیمت تقریبی آن (a) بنام خطای مطلق a گفته میشود

$$\Delta = |A - a|$$

یعنی a از عدد A حد اکثربقدر Δ کمتر و یا بیشتر است. در محاسبات معمولی طبق تعامل خطای مطلق نهائی از نصف دقت محاسبه بیشتر نمی باشد.

مثال *30*.

$$\pi \approx 3,14 \pm 0,005 \quad , \quad e \approx 2,718 \pm 0,0005.$$

مثال *31*. جدول قبلی را توام با خطاهای مطلق در نظر می گیریم

کمیت تقریبی	د قــت محاسبه	خطای مطلق
85 000 000	1000 000	500 000
358 000	1000	500
5 900	100	50
1483	1	0,5
18,7	0,1	0,05
6,94	0,01	0,005
1,253	0,001	0.0005

خطای نسبی. خطای مطلق عدد تقریبی نظر به مقدار کمیت میتواند مهم و یا بدون اهمیت باشد، بعبارت دیگرخطای مطلق بمقایسهء کمیت مربوط کسب اهمیت مینماید. لذا مقایسه خطای مطلق با عدد تقریبی دریک محاسبه لازمی است. وقتی که با اعداد بسیار

بزرگ و یا بسیار کوچک سروکار داریم، خطای نسبی اهمیت بیشتری پیدا می کند. نسبت بین خطای مطلق و کمیت واقعی عبارت از خطای نسبی میباشد.

$$\delta := \frac{\Delta}{A}$$

مثال32. خطاهای مطلق و نسبی عدد تقریبی $a = 0,3333$ از عدد واقعی $A = \frac{1}{3}$ عبارت اند از

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \tfrac{1}{3} - 0,3333 \right| = \tfrac{1}{3}.10^{-4} \\ \delta &= \frac{\Delta}{A} = \frac{\frac{1}{3}.10^{-4}}{\frac{1}{3}} = 10^{-4} = 0,01\% \end{aligned}$$

ارقام مهم اعدا د *(Significant digits)***.** ارقام مربوط مانتیس یک عدد تقریبی از ارایه علمی آن بنام ارقام مهم و یا ارقام با معنی از همان عدد گفته میشود، لذا ارقام مهم عدد عبارت از تمام ارقام غیر صفری و صفرهای بین آن ها می باشد. صفرهای سمت را ست و یا چپ عدد شامل ارقام مهم نیستند. اما بعضاً صفرها یکه بخاطر تعیین دقت در سمت راست اعداد نوشته میشود شامل ارقام مهم اند *[14]*، مثلاً در جداول لوگارتمی و مثلثاتی.

مثال33

عــدد تقریبی	ارائه علمی عدد	ارقام مهــم
a. $947\ 800$	$(9,478).10^5$	$9\ ,\ 4\ ,\ 7\ ,\ 8$
b. $407\ 600$	$(4,076).10^5$	$4\ ,\ 0\ ,\ 7\ ,\ 6$
c. $0,009\ 05$	$(9,05).10^{-3}$	$9\ ,\ 0\ ,\ 5$

(d) اعداد دارای دورقم مهم 46 ، $0,00083$ ، $(4,0)10^2$ ، $0,050$

(e) اعداد دارای سه رقم مهم 323 ، 403 ، $(4,00)10^2$، $0,000800$

(f) اعداد با چهار رقم مهم $6,001$ ، $(4,000)10^3$ ، $0,002345$، $9,004$

رقم غیر قطعی اعداد تقریبی. آخرین رقم غیر صفری سمت راست یکعدد تقریبی عبارت از رقم غیر قطعی آن میباشد.

مثال 34.

رقــم غیرقطعی	عــد د تقریبی
5	*400 25*
7	*9,467*
6	*0,046*

ارقام صحیح (اصلی) اعداد *(Correct digits)*. تعداد از ارقام مهم یکعدد تقریبی در حالیکه خطای مطلق از نصف واحد مربوط آن ها تجاوز نکند عبارت از ارقام صحیح (اصلی) عدد مذکور اند.

بدین ترتیب ارقام اصلی یکعدد بمقایسه خطای مطلق و یا دقت اندازه گیری آن معین میشوند، در جداول چهار رقمی و یا پنج رقمی لوگارتمی، کمیت ها تا چهار و یا پنج رقم اصلی درج می گردند.

مثال 35.

ارقام صحیح	خطای مطلق	عدد تقریبی
4 , 9 , 5	*500 000*	*495 000 000*
2 , 9 , 8 , 5	*0, 000 5*	*2,985 4*
3 , 2 , 5 , 8	*0, 005*	*32,583*
1 , 8 , 9	*0, 005*	*1,897 1*
3 , 0 , 1 , 0	*0,000 05*	$\log 2 = 0{,}3010$

گرد کردن اعداد *(Rounding of numbers)*. هرگاه بخواهیم جهت سهولت محاسبه یکعدد حقیقی را به قیمت تقریبی آن (با در نظر داشت دقت لازم و تحمل خطای مناسب) با تعداد کمتری ارقام مهم تعویض نمائیم، دساتیر ذیل را بکار می بندیم

حالت اول در صورتیکه ارقام قابل حذف از پنج واحد ردیف مربوط کمتر باشند، بدون تغییر ارقام باقیمانده، حذف میشوند مثلاً

مثال 36 .

$$a.\quad 4.976425 \approx 4.976 \pm 0.0005$$
$$b.\quad 0.99938 \approx 0.999 \pm 0.0005$$

حالت دوم اگر ارقام قابل حذف از پنج واحد بیشتر باشند، بعد از حذف آن ها به رقم قبلی (که حذف نمیشود) یک واحد علاوه می گردد.

مثال37.

$$a.\quad 0.9864 \approx 0.99 \pm 0.005$$
$$b.\quad 2.476822 \approx 2.477 \pm 0.0005$$

حالت سوم. وقتی که رقم قابل حذف پنج واحد باشد، بعد از حذف میتوان یکی از دساتیر اول و یا دوم را رعایت نمود، اما تعامل بر آن است که باید رقم قبلی که حذف نمیشود بیک عدد جفت مبدل گردد، یعنی اگر تاق باشد دستور دوم و در صورتیکه جفت باشد دستور اول مراعات میشود. *[44]*

مثال 38.

$$0.98315 \approx 0.9842 \pm 0.00005\ ,\ \ 0.465 \approx 0.46 \pm 0.005\ ,\ \ 0.9995 \approx 1 \pm 0.0005.$$

گرد کردن اعداد طبیعی. در محاسبات و احصائیه گیری اکثراً ضرورت می افتد که اعداد و کمیت های غیر کسری گرد شوند، مثلاً ممکن است نفوس یک مملکت به تقریب یک ملیون و یا نفوس یک شهر به دقت یک هزار احصائیه گیری گردد. در چنین حالات عین دساتیر قبلی برای گرد ساختن اعداد طبیعی نیز رعایت میشوند با تفاوت اینکه ارقام حذف شده به صفرها در عین موقعیت تعویض می گردند.

مثال39.

$$a.\quad 85948761 \approx 86000000 \pm 500000$$
$$b.\quad 466324 \approx 466000 \pm 500$$
$$c.\quad 24500000 \approx 24000000 \pm 500000.$$

خطای گردکردن. وقتی که یکعدد طبق دستور گرد میشود، محاسبه یک خطای مطلق را باید تحمل کند و این خطای بوجود آمده عبارت از خطای گرد کردن است که در حقیقت باز هم از نصف دقت اندازه گیری بیشتر نمی شود.

7. تمرین

1. آیا ست های ذیل تحت عملیه های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بسته اند؟

$$A = \{-1, 1\} \quad , \quad B = \{x : x = a + \sqrt{3}\,b \,, a,b \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad C = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$$

معادلات ذیل را مرحله بمرحله با کاربرد قوانین اعداد حقیقی حل کنید.

$$2.\quad 2x + 6 = 3x + 2 \quad , \quad 3.\quad 2x + 5 = 8$$
$$4.\quad (x - 1)(x + 2) = 0 \quad , \quad 5.\quad x^2 = 2x$$

برای اعداد حقیقی a و b نشان دهیدکه

$$6.\quad (-a)(-b) = ab \;,\; 7. -(a + b) = (-a) + (-b)$$

$$8.\quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad , \quad b \neq 0$$

9. اگر x و y اعداد ناطق باشند، نشان دهید که اعداد $x + y$ و xy نیز ناطق است.

10. نشان دهید که از غیر ناطق بودن x و y نتیجه نمیشود که اعداد $x + y$ و xy نیز غیر ناطق هستند.

11. اگر $a < b$ و $c < d$ ، ثبوت کنید که $ad + bc < ac + bd$.

12. اگر $0 < c < 1$ باشد، نشان دهید که $0 < c^2 < c < 1$.

13. اگر $1 < c$ باشد، نشان دهید که $1 < c < c^2$.

14. برای مثبت x و y نشان دهید که

($x^2 < xy < y^2$ (کمک: نشان دهید که $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$)

15. نشان دهید که

$$i)\ 0<x<1 \Rightarrow 1>x>x^2>x^3>\cdots \quad , \quad ii)\ x>1 \Rightarrow 1<x<x^2>x^3<\cdots$$

16. ست یک عنصرهء $S=\{a\}$ را درنظرگرفته $supS$ و $inf\, s$ رابنویسید.

17. ست A دارای چه مشخصات است، اگر $sup A = inf A$ باشد.

18. سه سرحد فوقانی از ست $A=\{x : x \in \mathbb{R}, x \le 0\}$ و سه سرحد تحتانی از ست $A=\{x : x \in \mathbb{R}, x \ge 0\}$ را بنویسید.

19. نشان دهید که هیچ سر حد بالایی یاپایینی از انتروال $I=(0,1)$ متعلق به خودش نیست.

20. کوچکترین عدد طبیعی n را دریافت کنید که

$$a.\quad (135)^{\frac{1}{3}} < n \qquad , \qquad b.\quad \sqrt{238} < n$$

21. عدد ناطق r را طوری تعیین کنید طوریکه $\sqrt{5} < r < \sqrt{6}$ (کمک: $500 < r^2 < 600$).

22. نشان دهیدکه برای سه عدد x، y و z شرط ذیل صدق می کند

$$x < y \Leftrightarrow x - y < x - z$$

23. نشان دهید که ست $S=\{X \in \mathbb{R} : X > 0, X^2 < 2\}$ غیرخالی و از بالامحدود است.

24. اگرست های اعداد حقیقی Aو B ازبالا محدود باشند، نشان دهید که

$$sup A + sup B = sup(A+B)$$

25. اگرست های اعداد حقیقی Aو Bاعداد منفی نبوده از بالا محدود باشند، نشان دهید که

$$\sup A \sup B = \sup(AB)$$

26. نشان دهیدکه $-2xy < x^2 + y^2$.

27. نشان دهیدکه

$$i)\ a > 0 \Rightarrow \tfrac{1}{a} > 0 \quad , \quad ii)\ a < 0 \Rightarrow \tfrac{1}{a} < 0$$

28. کسور متوالی $0.2\overline{35}$ ، $0.00\overline{45}$ ، $0.321\overline{38}$ و $0.\overline{9}$ را بحالت کسرعام بنویسید.

29. اگر S یک ست محدود اعداد حقیقی بوده و $I_s = [\inf S , \sup S]$ باشد، نشان دهید که

$$S \subset I_s$$

30. نشان دهید که ازجمله 52 نفر، حداقل دو نفرایشان روز تولد در یک هفته دارند.

31. چند تابع یک بیک از $S = \{1, 2\}$ در $T = \{a , b , c\}$ میتوان نوشت.

32. یک رابطهء بای جکتیف بین اعادا طبیعی و اعداد تاق بنویسید.

33. برای $-1 \le x \le 1$ نشان دهید که $|x^2 + x| \le 2$ است.

34.اعداد ذیل را در سیستم اعشاری انکشاف دهید:

$$i.\ 234.678 \quad , \quad ii.\ 95000000 \quad , \quad iii.\ 0.0000095$$
$$iv.\ 40000000000 , ii.\ 200000049 , vi.\ 1000000000000$$

35.اعداد ذیل را بشکل اصلی آنها بنویسید.

$$i.\ 10^6 + 10^4 + 5.10^{-4} \quad , \quad ii.\ 2.10^3 + 4.10^2 + 10 + 10^{-3}$$
$$iii.\ 10^{-5} + 6 \cdot 10^{-6} \quad , \quad iv.\ 10^9 \quad , \quad iv.\ 10^{-8}$$

36 .اعداد ذیل را بشکل علمی ارایه کنید.

$i.\ 90005004\ ,\ ii.\ 4900000000\ ,\ iii.\ 3000000008$
$iv.\ 25,0009\ ,\ v.\ 0,000000076\ ,\ vi.\ 12000000000$

37 .اعداد ارایه شده علمی ذیل را یصورت اصلی اعشاری بنویسید:
$i.(2,00034)\cdot 10^7,\ ii.10^{-9},\ iii.(1,200056)\cdot 10^5,\ iv.(9,8888)\cdot 10^{-6}$

38.اگر $\pi = 3,1415926545$ بحیث عدد اصلی در نظر گرفته شود، خطای مطلق و دقت محاسبه را در هریک از قیمت های تقریبی آ ن که ذیلا داده شده اند، مشخص کنید.
$1.\ \pi_1 = 3,14\ ,\ ii.\ \pi_2 = 3,142\ ,\ iii.\ \pi_3 = 3,1416\ ,\ iv.\ \pi_4 = 3,14159:$

39. خطای مطلق نهایی و دقت محا سبه را با توجه به ارقام اعداد ذیل بنویسید.
$i)\ e \approx 2.71\ ,\ ii)\ e \approx 2.718\ ,\ iii)\ 2.71828182$

40. خطای مطلق اعداد d, c, b, a داده شده، دقت محاسبه را در انها تعیین کنید.
$\Delta(a) = 0.5\ ,\ \Delta(b) = 0.005\ ,\ \Delta(c) = 0.0005\ ,\ \Delta(d) = 0.00005$

41 . ارقام مهــم اعداد ذیل را بنو یسید :
$a = 745\ 065\ 000\ ,\ b = 0,000\ 987\ ,\ c = 2,000\ 987\ ,\ e = 78\ 028\ 001$

42 . ارقام اصلی اعداد ذیل را با توجه به خطاهای مطلق آن ها تشخیص کنید:
$a = 12\ 345.6\ ,\ \Delta(a) = 0.5\ ,\ b = 23.9851,\ \Delta(b) = 0.5$
$c = 2\ 564.28\ ,\ \Delta(c) = 0.5\ ,\ d = 0,943\ 285,\ \Delta(d) = 0,000\ 5$

43 . عدد $3\ 1415926 .3$ را به ترتیب تا دو رقم، سه رقم، چهار رقم، پنج رقم و شش رقم بعد از اعشاری گرد نموده خطاهای مطلق گرد کردن را در هر مورد آن بنویسید.

44 . عدد $2\ 7.182818285$ را تا دورقم، چهار، شش رقم و هشت رقم بعد از اعشاری گرد کنید.

فصل دوم
ترادف ها

نظریه ترادفها یکی از مباحث مهم و اساسی انالیز ریاضی است، ازین بحث در تعریف و توضیح لیت توابع، سلسله های ریاضی، انتگرال غیرمعین، حل مسایل محاسبه و غیره مفاهیمی که طبعت تحلیلی دارند، بطور وسیع استفاده میگردد. هر چند در ریاضی عمومی 2، مفهوم ترادفها و از جمله ترادفهای حسابی و هندسی معرفی شده اند، درینجا اساسات موضوع بصورت عموم و بطورسیتماتیک مورد بحث قرارمیگیرد.

1. معرفی ترادف

ترادف عبارت از تابعی است که ناحیه تعریف آن ست اعداد طبیعی میباشد. هرگاه f تابعی باشد که به هر عدد طبیعی n عد حقیقی $f(n) = a_n$ را مربوط سازد، درین صورت ست اعداد مرتب

$$a_1 \;,\; a_2 \;,\; a_3 \;,\; \cdots$$

که عبارت از قیمت های تابع اند، بنام ترادف گفته میشود. این ترادف را مختصراً به $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یا $\{a_n\}$ نمایش میدهیم. اعداد a_1 ، a_2 ، a_3 و ... باالترتیب بنام عناصراول، دوم ، سوم و غیره مینامند، بصورت عموم یک ترادف ذریعه عنصراختیاری a_n مشخص میشود، بعضاً این ترادف را به $X = (a_1 , a_2 , a_3 , \cdots)$ نیز نمایش میدهند.

مثال*1*. ترادف $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ را در نظرگرفته عناصر a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_{10} و a_{100} را مشخص کنید.

حل:

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad , \quad a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \quad , \quad a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$a_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11} \quad , \quad a_{100} = \frac{100}{100+1} = \frac{100}{101}$$

ترادف رجعی. ترادفی که هرعنصردران بحیث تابعی ازعناصرقبلی تعریف میگردد، بنام ترادف رجعی یاد میشود. ترادف رجعی بشکل $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$ درحالیکه در ان x_1معین باشد، مطرح میگردد. ترادف های رجعی درمحاسبات کمپیوتری مورد استفاده قرارمیگیرند.

مثال2. ترادف $x_{n+1} := \frac{2x_n}{1-x_n}$ راطوریکه $x_1 = 3$ درنظرگرفته عناصر x_2 ، x_3 و x_4 را بنویسید.

حل:

$$x_2 = \frac{2x_1}{1-x_1} = \frac{2(3)}{1-3} = \frac{6}{-2} = -3 \Rightarrow x_3 = \frac{2x_2}{1-x_2} = \frac{2(-3)}{1-(-3)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{2x_3}{1-x_3} = \frac{2\left(-\frac{3}{2}\right)}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{-3}{1+\frac{3}{2}} = \frac{-3}{\frac{5}{2}} = -3\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{2}$$

تقارب ترادف. گفته میشود که ترادف $\left\{ a_n \right\}$ به عدد a تقرب میکند، درصورتیکه برای هر عدد مثبت ε یک عدد طبیعی N(که ممکن است مربوط εباشد) وجود داشته باشد، طوریکه برای هرعدد طبیعی n بزرگتر از N شرط

$$\left|a_n - a\right| < \varepsilon$$

صدق نماید. درینصورت گفته میشود که لیمت a_n عبارت از a است و مینویسیم که

$$a_n \to a \text{ یا } \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

ترادفی که متقارب نباشد، متباعد نامیده میشود.

شرایط تقارب ترادف. هرگاه $\{a_n\}$ یک ترادف متقارب اعدادحقیقی، و $a \in \mathbb{R}$ باشد، شرایط ذیل معادل اند:

1. ترادف a_n به a متقارب است، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
2. برای هر عدد مثبت ε یک عدد طبیعی N وجود دارد، طوریکه برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از N شرط $|a_n - a| < \varepsilon$ صدق نماید.
3. برای هر عدد مثبت ε یک مجاورت $u_\varepsilon(a)$ و عدد طبیعی N وجود دارد، طوریکه برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از N شرط $a_n \in u_\varepsilon(a)$ صدق می کند.
4. برای هر عدد مثبت ε یک عدد طبیعی N وجود دارد، طوریکه برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از N شرط $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ صدق مینماید.

بینهایت بحیث لیمت ترادف. هرگاه برای هر $K \in \mathbb{R}$، عدد طبیعی N(که ممکن است مربوط Kباشد) موجود گردد بطوریکه اگر $n \geq K$ باشد، در آن صورت $a_n < K$، گفته میشود ترادف a_n به $\infty +$ تقرب میکند و مینویسیم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

درصورتیکه برای هر $K \in \mathbb{R}$، عدد طبیعی N(که ممکن است مربوط Kباشد) موجود گردد بطوریکه اگر $n \leq K$ باشد، در آن صورت $a_n > K$، گفته میشود ترادف a_n به $\infty -$ تقرب میکند و مینویسیم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

مفهوم تقارب برای ترادف های اطلاق میگردد که دارای لیمت متناهی باشند.

مثال 2. ترادف $x_n = (-1)^n$را مدنظرگرفته ، x_1، x_2، x_{13}و x_{100} رابنویسید.

حل:

$$x_1 = (-1)^1 = -1 \quad , \quad x_2 = (-1)^2 = 1$$
$$x_{13} = (-1)^{13} = -1 \quad , \quad x_{100} = (-1)^{100} = 1$$

مثال3. با در نظر داشت ترادف $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$، اعداد y_1 ، y_5 و $y_6 - y_7$ معین کنید.

حل:

$$y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$$

$$y_7 - y_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{128} - \frac{1}{64} = \frac{1-2}{128} = -\frac{1}{128}$$

مثال4 (ترادف فیبوناتچی). ترادف رجعی

$$f_1 = 1 \; , \; f_2 = 1 \; , \; f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \; , n = 2 , 3 , 4 , \cdots$$

را مدنظرگرفته f_3 ، f_4، f_5، f_6، f_7، f_8، f_9 و f_{10} را تعیین کنید.

حل: بصورت مختصرده عنصر ترادف فیبوناتچی قرار ذیل فهرست میشود.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

مثال5. ترادف $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ را برای $\alpha > 0$ مدنظرگرفته نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

.

حل: برای عدد مثبت ε عدد طبیعی N را طوریکه $N > \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}$ باشد، انتخاب میکنیم، داریم که

$$N > \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{N} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{N^\alpha}$$

برای هر عدد طبیعی n طوریکه $n > N$ باشد داریم.

$$\left|a_n - 0\right| = \left|\frac{1}{n^{\alpha}}\right| = \frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{N^{\alpha}} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0 .$$

قضیه. هرگاه یک ترادف متقارب باشد، دارای لیمت یکتا است.

ثبوت. فرض کنیم ترادف a_n متقارب بوده دارای دو لیمت a و b باشد، پس

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 : \left|a_n - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 : \left|a_n - b\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left|a - b\right| = \left|a_n - b - (a_n - a)\right| < \left|a_n - b\right| + \left|a_n - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنابرین عدد $\left|a-b\right|$ از هر عدد کوچک $\varepsilon > 0$ کوچکتر است درنتیجه

$$\left|a - b\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

لهذا لیمت ترادف یکتا است.

2. محدودیت ترادف

1. ترادف a_n از بال امحدود گفته میشود، اگر عدد حقیقی M موجود باشد، طوریکه برای هر عدد طبیعی n شرط $a_n \leq M$ صدق نماید، بعبارت دیگر ترادف محدود از بالا دارای سرحد بالایی است.

2. ترادف a_n از پائین محدود گفته میشود، اگر عدد حقیقی m موجود باشد، طوریکه برای هر عدد طبیعی n شرط $m \leq a_n$ صدق نماید، بعبارت دیگر ترادف محدود از پائین دارای سرحد پایانیی است.

3. بصورت عموم ترادف a_n را محدود میگوئیم، هرگاه از بالا و پائین محدود باشد. ترادف محدود دارای سرحدات بالایی و پائینی است.

درصورتیکه عدد حقیقی c وجود داشته باشد، طوریکه برای هر عدد طبیعی n شرط $\left|a_n\right| \leq c$ صدق نماید، پس $-c \leq a_n \leq c$ بوده بنابرین ترادف a_n محدود است.

مثال6. نشان دهید که ترادف $a_n = n^2$ از پائین محدود است.

حل: دیده میشود که تمام قیمت های این ترادف مثبت اند، یعنی $a_n = n^2 \geq 0$ پس ترادف مذکور از پایان محدود میباشد درحالیکه از بالا محدود نیست.

مثال7. محدودیت ترادف $b_n = 9 - n^2$ را ارزیابی نمایید.

حل: میبینیم که هر قیمت این ترادف از 8 بزرگتر نمیباشد، یعنی $b_n = 9 - n^2 \leq 8$ لذا ترادف از بالا محدود است، اما این ترادف از پایان محدود نیست.

مثال8. نشان دهید که ترادف $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ محدود است.

حل: چون در هر حالت $0 \leq \dfrac{n}{n+1} \leq 1$ است، پس ترادف a_n محدود میباشد.

قضیه. هرگاه ترادف a_n متقارب باشد، پس محدود است.

ثبوت. فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$، در آن صورت برای عدد $\varepsilon = 1$ عدد طبیعی N وجود دارد، طوریکه برای تمام اعداد طبیعی n بزرگتر از N داریم

$$|a_n - l| \leq 1$$

چون $|a_n| - |l| \leq |a_n - l|$ است پس $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| \leq 1 + |l|$ برای $n \geq N$ صدق میکند. با در نظرداشت $M = Max\left\{ a_1 , a_2 , a_3 , \cdots , 1 + |l| \right\}$ واضح دیده میشود که

$$|a_n| \leq M \; , \; \forall n \in \mathbb{N}$$

بنابرین ترادف a_n محدود است.

قضیه (مقایسه). هرگاه a_n و b_n دو ترادف متقارب باشند، طوریکه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ باشند، درصورتیکه برای هر عدد طبیعی n نامساوات $a_n \leq b_n$ صدق نماید، پس $a \leq b$ است، یعنی

$$a_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} a_n \ \le \ \lim_{n\to\infty} b_n$$

ثبوت. فرض کنیم $b < a$ باشد. برا ی هر $\varepsilon > 0$ داریم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon$$

حال عدد $\varepsilon > 0$ را طوری در نظر میگیریم که

$$0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$$

حال برای هر عدد طبیعی n طوریکه $n \ge Max\{N_1 \ , \ N_2\}$ باشد، میتوانیم بنویسیم که

$$0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2} \le \frac{1}{2}\left(a - b + b_n - a_n\right) \le \frac{1}{2}\left|a - b + a_n - b_n\right|$$

$$\le \frac{1}{2}|a_n - a| + \frac{1}{2}|b_n - b| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$$

نتیجه $\varepsilon < \varepsilon$ غیر ممکن است، بنابرین فرضیه $b < a$ نقض میگردد، پس $a \le b$ است.

نتیجه. هرگاه برای هر عدد طبیعی n قیمت های ترادف a_n منفی نباشد یعنی $a_n \ge 0$، پس $\lim_{n\to\infty} a_n$ نیز منفی نیست، به عبارت دیگر $\lim_{n\to\infty} a_n \ge 0$.

ثبوت. با در نظرداشت ترادف $\theta_n = 0$ واضح است که

$$\theta_n \le a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \theta_n \le \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \ge 0 \bullet$$

قضیه (ساندوویچ). هرگاه ترادفهای x_n ، y_n و z_n دارای خاصیت $x_n \le z_n \le y_n$ باشند و بر علاوه $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$، درین صورت $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

ثبوت. فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} x_n = u = \lim_{n\to\infty} y_n$، پس برای $\varepsilon > 0$ عددطبیعی K وجود دارد طوریکه

$$\begin{aligned}|x_n - u| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - u < \varepsilon \\ |y_n - u| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < y_n - u < \varepsilon\end{aligned} \Rightarrow -\varepsilon < x_n - u < z_n - u < y_n - u < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < z_n - u < \varepsilon \Rightarrow |z_n - u| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = u$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y \bullet$$

مثال 9. مقدار $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$ را محاسبه کنید.

حل: چون $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$ و $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ بنابرین $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

قضیه. هرگاه ترادف متقارب x_n به x تقرب نماید، درین صورت ترادف $|x_n|$ به $|x|$ تقرب میکند.، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x|_n = |x| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right|$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N : \left||x_n| - |x|\right| \le |x_n - x| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = |x| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| \bullet$$

قضیه. هرگاه ترادف متقارب غیر منفی x_n به x تقرب نماید، درین صورت ترادف $\sqrt{x_n}$ به $\sqrt{x}$ تقرب میکند.، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

ثبوت:

حالت اول. اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ باشد، در آن صورت

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left| x_n - 0 \right| < \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq x_n < \varepsilon^2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \sqrt{x_n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0 = \sqrt{0} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n} \, .$$

حالت دوم. $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$ در آن صورت $\sqrt{x} > 0$ و

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left| \sqrt{x_n} - \sqrt{x} \right| = \left| \frac{\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x} \right)\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \right|$$

$$= \frac{\left| x_n - x \right|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} < \frac{\left| x_n - x \right|}{\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left| x_n - x \right| < \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\varepsilon \sqrt{x} \right) = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \sqrt{x_n} - \sqrt{x} \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n} \quad \bullet$$

بقیه ترادف. هرگاه x_n ترادف اعداد حقیقی و m عدد طبیعی باشد، درین صورت ترادف $y_n = x_{m+n}$ بنام بقیهء بعد از m از ترادف x_n گفته میشود.

مثال *10*. ترادف $x_n = 2n - 1$ را در نظرگرفته بقیه بعد از 10 را درآن بنویسید.

حل: ترادف بقیه بعد از 10 عبارت است از

$$y_n = x_{10+n} = 2\left(10 + n\right) - 1 = 2n + 19 \; , \; n \in \mathbb{N}$$

به عبارت دیگر ترادف x_n و بقیه بعد از 10 بالترتیب عبارت اند از

$$x_n : 1 , 3 , 5 , 7 , 9 \; , \; \cdots$$

$$y_n : 21 , 23 , 25 , 27 , \cdots$$

یعنی ترادف اولی اعداد طاق و ترادف بقیه عبارت از اعداد طاق بزرگتر از 20 میباشند.

قضیه. هرگاه x_n یک ترادف اعداد حقیقی و $y_n = x_{m+n}$ بقیه بعد از m از آن باشد، در آن صورت x_n متقارب است اگر و تنها اگر y_n متقارب باشد.

ثبوت. $\Leftarrow$: فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ در آن صورت

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \left|x_n - l\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|y_{n-m} - l\right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \forall n \geq N - m : \Rightarrow \left|y_n - l\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = l$$

پس y_n متقارب است.

ثبوت. $\Rightarrow$: هرگاه $\lim_{n\to\infty} y_n = l$، پس

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : \left|y_n - l\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|x_{n+m} - l\right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \forall n \geq N + m : \Rightarrow \left|x_n - l\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = l$$

در نتیجه y_n نیز متقارب میباشد •

قضیه. هرگاه a_n و x_n دو ترادف اعداد حقیقی بوده $x \in \mathbb{R}$ باشد. اگر برای یک $c > 0$ و یک عدد طبیعی N داشته باشیم که

$$(i).\quad \left|x_n - x\right| \leq c\left|a_n\right|,\ \forall n \geq N \quad , \quad (ii).\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

درینصورت $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

ثبوت.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall n \geq K : \left|a_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{c}$$
$$\Rightarrow \forall n \geq Max\{N, K\} : \left|x_n - x\right| \leq c\left|a_n\right| < c\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \bullet$$

مثال *11*. نشان دهید که اگر $a > 0$ باشد، در آن صورت $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0$

حل: واضح است که

$$\left|\frac{1}{1+na}-0\right|\le\frac{1}{na}=\left(\frac{1}{a}\right)\frac{1}{n}=c\left|\frac{1}{n}\right| \;,\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+na}=0$$

مثال *12*. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$.

حل:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\frac{1}{n} \;,\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=0.$$

مثال*13*. اگر $0<b<1$ باشد، ثبوت کنید که $\lim_{n\to\infty}\left(b^n\right)=0$.

حل: با در نظر داشت نامساوات برنولی $0<a \,,\, (1+a)^n>1+na$ میتوانیم بنویسیم که

$$0<b<1\Rightarrow\frac{1}{b}>1\Rightarrow\left|b^n-0\right|=b^n=\frac{1}{\left(1/b\right)^n}\overset{a=\frac{1}{b}-1}{=}\frac{1}{(1+a)^n}<\frac{1}{1+na}$$

وچون $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+na}=0$، درنتیجه $\lim_{n\to\infty}\left(b^n\right)=0$.

قضیه. $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n\ge N:x_n>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow\frac{1}{x_n}<\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0\bullet$$

قضیه. هرگاه x_n ترادف اعداد حقیقی مثبت بوده و $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=l$ وجود داشته باشد،

در حالت $l<1$، ترادف x_n متقارب است و $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

ثبوت: قبل از همه واضح است که $l \geq 0$، حال عدد r را طوری در نظر میگیریم که

$$l<a<1$$

را $\varepsilon = a-l>0$ عدد طبیعی k وجودارد طوریکه برای $n\geq k$ داریم

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-l\right|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<\frac{x_{n+1}}{x_n}-l<\varepsilon \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n}<l+\varepsilon=l+(a-l)=a$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n}<a \Rightarrow 0<x_{n+1}<x_n a<x_{n-1}a^2<\cdots<x_k a^{n-k+1}=\frac{x_k}{a^k}a^{n+1}$$

اگروضع کنیم $C=\frac{x_k}{a^k}$ درانصورت $0<x_{n+1}<Ca^{n+1}$ بنابرین

$$|x_{n+1}-0|<C|a|^{n+1}, 0<r<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \bullet$$

مثال14. تقارب ترادف $x_n=\frac{n}{2^n}$ با در نظرداشت قضیه قبلی ارزیانی کنید.

حل: میبینیم که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{2^n}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n}=\frac{1}{2}<1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0 \bullet$$

قضیه. $$p>0\,,\ a>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^p}=\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0$$

ثبوت. برای $x_n = \dfrac{n^p}{a^n}$ داریم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{(n+1)^p}{a^{n+1}}\right)\left(\frac{a^n}{n^p}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \frac{1}{a} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n} = 0 \quad \bullet$$

3. خواص ترادفهای متقارب

قضیه. هرگاه a_n و b_n دو ترادف متقارب اعداد حقیقی باشند، در آن صورت برای $\alpha \in IR$ ترادفهای $a_n + b_n$ ، αa_n ، $a_n b_n$ ، $\dfrac{a_n}{b_n}$ نیزمتقارب اند و

$$1.\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \quad , \quad 2.\ \lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

$$2.\ \lim_{n\to\infty}(c\, b_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \quad , \quad 4.\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b \neq 0$$

ثبوت: فرض کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$، درانصورت

1. برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی N وجود دارد طوریکه

$$\forall n \in IN\ ,\ n \geq N : \quad |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

بنابرین برای هر عدد طبیعی $n \geq N$ میتوان نوشت که

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - b| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنابرین

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

برای تقارب $a_n - b_n$ بعین روش استدلال شده میتواند.

2. همچنین

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b - a_n b +_n a_n b - ab|$$
$$\leq |a_n(a_n - b)| + |(a_n - b)b| \leq |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|a|$$
$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| \leq |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|a|$$

از تقارب a_n نتیجه میشود که این برادف محدود است بنابرین عدد $M_1 > 0$ وجود دارد طوریکه برای هر عدد طبیعی n نامساوات $|a_n| \leq M_1$ صدق میکند، بنابرین برای $M := sup\{M_1 , b\}$ داریم که

$$\Rightarrow \ |a_n b_n - ab| \leq M\ |b_n - b| + M|b_n - b|$$

میدانیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists K_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq K_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists K_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq K_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

بنابرین برای $K = sup\{K_1 , K_2\}$ و برای هر عدد طبیعی n طوریکه $n \geq K$ میتوان نوشت که

$$\Rightarrow \ |a_n b_n - ab| \leq M\ |b_n - b| + M|b_n - b| < M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon$$
$$\Rightarrow 2.\ \lim_{n\to\infty}(a_n\ b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

3. برای ترادف a_n وترا دف ثابت $b_n = c$ در حالیکه $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = c$ با در نظرداشت حاصل ضرب ترادفهای متقارب مینویسیم که

$$\lim_{n\to\infty}(c\,a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n a_n) = \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = c\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

4. در قدم اول نشان میدهیم که $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

میدانیم که

$$\left||b_n|-|b|\right| \le |b_n-b| \Rightarrow -|b_n-b| \le |b_n|-|b| \le |b_n-b|$$

$$\Rightarrow -|b_n-b| \le |b_n|-|b| \quad \cdots \quad (i)$$

با در نظرداشت اینکه $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ، برای $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}b$ عدد طبیعی K_1 وجود دارد طوریکه

$$\forall n \ge K_1 : |b_n-b| \le \varepsilon_1 \Rightarrow -\varepsilon_1 \le -|b_n-b| \overset{(i)}{\le} |b_n|-|b|$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_1 \le -|b_n-b| \le |b_n|-|b| \Rightarrow |b|-\varepsilon_1 \le -|b_n-b| \le |b_n|$$

$$\Rightarrow |b|-\frac{|b|}{2} \le -|b_n-b| \le |b_n| \Rightarrow \frac{|b|}{2} \le |b_n|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|b_n|} \le \frac{2}{|b|} \quad \cdots \quad (ii)$$

همچنین

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \ge N_n : |a_n-a| \le \frac{\varepsilon}{2}|b|^2 \cdots (iii)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ , N = \sup\{N_1 , N_2\} : \left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n-b}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n||b|}|b_n-b|$$

$$\overset{(ii)}{\Rightarrow} \left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| \le \frac{2}{|b|^2}|b_n-b| \overset{(iii)}{\le} \frac{2}{|b|^2}\left(\frac{\varepsilon}{2}|b|^2\right) = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| \le \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} .$$

باالآخره با در نظرداشت لیمت حاصل ضرب ترادفها داریم که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[a_n\left(\frac{1}{b_n}\right)\right]=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right)\right]=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$$ •

مثال *15*. مقدا ر $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2n^2}{n^2}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2n^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)+2=0+2=2$$

مثال *16*. مقدا ر $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+1}{1+2n^3}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+1}{1+2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+2\right)}=\frac{1}{2}$$

4. ترادفهای یکنواخت(مونوتون)

تعریف. هرگاه a_n ترادفی از اعدا دحقیقی باشد، گفته میشود a_n متزاید است، اگر نامساوات های $\cdots \le a_{n+1} \le a_n \le \cdots \le a_3 \le a_2 \le a_1$ را صدق کند و a_n را متناقص گویند درصورتیکه نامساوات های $\cdots \ge a_{n+1} \ge a_n \ge \cdots \ge a_3 \ge a_2 \ge a_1$ را صدق نماید. ترادفی که متزاید یا متناقص باشد، بنام ترادف یکنواخت گفته میشود.

شرط متزاید بودن ترادف a_n را $a_n \le a_{n+1}$ و متناقص بودن را $a_n \ge a_{n+1}$ نیز میتون در نظرگرفت.

همچنین a_n دقیق متزاید نامیده میشود اگر $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$ باشد و دقیق متناقص نامیده میشود وقتی که $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$ باشد.

مثال17. ترا دف های متزاید:

$$i. \quad a_n = n \quad : 1 , 2 , 3 , 4 , \cdots , n , \cdots$$
$$ii. \quad b_n = a^n \quad : a , a^2 , a^3 , \cdots , a^n \cdots , a > 1$$

مثال18. ترا دف های متناقص:

$$i. \quad u_n = \frac{1}{n} \quad :1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \cdots , \frac{1}{n} , \cdots$$
$$ii. \quad w_n = b^n \quad :b , b^2 , b^3 , \cdots , b^n \cdots , 0 < b < 1$$

مثال19. ترادف های غیریکنواخت:

$$i. \quad y_n = (-1)^n \frac{1}{n} : \quad -1 , \frac{1}{2} , -\frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \cdots , (-1)^n \frac{1}{n} , \cdots$$
$$ii. \quad z_n = (-1)^n 2n : \quad -2 , 4 , -6 , 8 , \cdots , (-1)^n 2n , \cdots$$

قضیه تقارب یکنواخت. ترادف یکنواخت a_n از اعداد حقیقی متقارب است اگرو فقط اگر محدود باشد. برعلاوه

1. اگر a_n ترادف متزاید و محدود باشد، در آن صورت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\{ a_n \}$.
2. اگر a_n ترادف متناقص و محدود باشد، درآن صورت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = inf\{ a_n \}$.

ثبوت. شرط لزوم: طبق قضیه قبل هر ترادف متقارب محدود است.

شرط کافی: اگر a_n متزاید و از بالا محدود باشد $sup\{a_n\} = a$ موجود و متناهی است. پس برای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی N وجود دارد طوریکه

$$a-\varepsilon<a_N\leq a$$

برای $n\geq N$ داریم که $a_N\leq a_n$ و برای هر عدد طبیعی $a_n\leq a$ پس

$$a-\varepsilon<a_n\leq a\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=a=sup\{a_n\}$$

درصورتیکه a_n متناقص و از پایان محدود باشد، پس ترادف $\{-a_n\}$ متزاید و از بالا محدود است و

$$b:=inf\{a_n\}\Rightarrow -b=sup\{-a_n\}\Rightarrow b=-\lim_{n\to\infty}(-a_n)=\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=inf\{a_n\}\bullet$$

مثال20. نشان دهید که ترادف $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ متباعد است.

حل:

$$x_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow x_{2^n}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}\Rightarrow x_{2^n}>1+\frac{n}{2}$$

دیده میشود وه ترادف x_{2^n} غیر محدود و درنتیجه ترا دف x_n نیز غیر محدود است بنابرین متباعد میباشد.

مثال21. ترادف رجعی $y_{n+1}=\frac{1}{4}(2y_n+3)$ ، $y_1=1$ را در نظرگرفته نشان دهید که متقارب است و لیمت آنرا دریافت کنید.

حل: دیده میشود که $y_2=\frac{1}{4}(2+3)=\frac{5}{4}<2$ یعنی $y_1<y_2<2$، فرض میکنیم که

$$y_k < 2 \Rightarrow y_{k+1} = \frac{1}{4}\left(2y_k + 3\right) < \frac{1}{4}\left(4+3\right) = \frac{7}{4} < 2$$

در نتیجه $y_{k+1} < 2$ پس ترادف y_n از بالا محدود میباشد.

حال بروش استقراء نشان میدهیم که y_n متزاید است:

برای $n = 1$:

$$y_1 = 1 < \frac{5}{2} = y_2 \Rightarrow y_1 < y_2$$

فرضاً برای $n = k$ نامساوات $y_k < y_{k+1}$ بر قرار باشد، بر اساس آن میتوان نوشت که

$$2y_k + 3 < 2y_{k+1} + 3 \Rightarrow y_{k+1} = \frac{1}{4}\left(2y_k + 3\right) < \frac{1}{4}\left(2y_{k+1} + 3\right) = y_{k+2}$$

لهذا $y_{k+1} < y_{k+2}$ ، پس برای هر عدد طبیعی n نامساوات $y_n < y_{n+1}$ صدق میکند.

بنابرین ترادف y_n متزاید است. ترادف متزاید و از بالامحدود متقارب میباشد. در صورتیکه $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ باشد داریم که

$$y_{n+1} = \frac{1}{4}\left(2y_n + 3\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \frac{1}{4}\left(2\lim_{n\to\infty} y_n + 3\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}\left(2y + 3\right) \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{3}{2}$$

مثال22. ترادف رجعی $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ ، $x_1 = 1$ را در نظرگرفته نشان دهید که متقارب است و لیمت آنرا در یافت کنید.

حل: برای $n = 1$ واضح است که $1 < x_1 < x_2 < 2$.

فرضاً برای $n = k$ نامساوات $1 \le x_k < x_{k+1} < 2$ بر قرار باشد، بر اساس آن میتوان نوشت که

$$1 \le x_k < x_{k+1} < 2 \Rightarrow 2 \le 2x_k < 2x_{k+1} < 4$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{2} \le \sqrt{2x_k} < \sqrt{2x_{k+1}} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 \le x_k < x_{k+1} < 2$$

بنابرین $2 > x_{n+1} > x_n > 1$ یعنی ترادف x_n متزاید و محدود است در نتیجه متقارب میباشد. اگر قرار دهیم که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ در آن صورت

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \sqrt{2\lim_{n\to\infty} x_n} \Rightarrow x = \sqrt{2x}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x = 2$$

چون $2 \geq x_n \geq 1$ پس $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 2$.

مثال23. ترادف رجعی $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ ، $x_1 = 1$ رابرای $a > 0$ در نظرگرفته نشان دهید که متقارب است و لیمت آنرا در یافت کنید.

حل: چون x_n یک حل معادله $x_n^{\ 2} - 2x_{n+1}x_n + a = 0$ است، باید که

$$\Delta = \left(-2x_{n+1}\right)^2 - 4a \geq 0 \Rightarrow x_{n+1}^{\ 2} \geq a > 0\,,\ \forall n \geq 2$$

پس ترادف x_n از پایان محدود است و

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{\left(x_n^{\ 2} - a\right)}{2x_n} \geq 0$$

$$x_n - x_{n+1} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$$

بنابرین ترادف x_nمتناقص است و از پایان محدود میباشد لذا متقارب میباشد. وضع میکنیم

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ازینجاداریم که

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 - 2\left(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}\right)\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + a = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2xx + a = 0 \Rightarrow a - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{a} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x_n = \sqrt{a}\ .$$

یاد داشت. ترادف x_n بخاطر محاسبه جذر عدد مثبت a مورد استفاده قرار میگیرد.

قضیه: ترادف $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ متقارب است و

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\ldots$$

ثبوت. میدانیم که

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

ازینجا بدست می آید که

$$e_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$e_{n+1} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

دیده میشود که e_{n+1} دارای یک جمله مثبت بیشتراز e_n میباشد، یعنی ترادف e_n متزاید است و از روابط فوق دیده میشود که

$$2 < e_n < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

بنابرین $2 < e_n < 3$ بوده درنتیجه ترادف e_n محدود است و ترادف محدود و متزاید متقارب یمیباشد، پس میتوانیم وضع کنیم

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}.\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}.\frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{1}{n!}.\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots.$$

سمت راست رابطهء اخیر یک مجموعهء متشکل ازبینهایت اعداد مثبت (یک سلسلهء عددی) میباشد. بهر اندازه که تعداد عناصرسلسله از سمت راست بیشتر انتخاب شود عدد حاصل از مجموع آنها بحیث قیمت تقریبی لمیت دقیقتر بدست می آید، بطور مثال:

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}=2.711665$$

دیده میشود که از مجموع شش عنصر سلسله، عدد مطلوب e تا دو رقم بعد از اعشاری طور دقیق محاسبه میگردد، عدد e تاده رقم بعد از اعشاری عبارت است از

$$\boxed{e \quad \approx \quad 2.7182818284\ldots}$$

5. ترادفهای فرعی

تعریف. هرگاه $\{x_n\}$ یک ترادف اعداد حقیقی و $\{n_k\}$ یک ترادف دقیق متزاید از اعداد طبیعی باشد در آن صورت ترادف $\{x_{n_k}\}$ را بنام ترادف فرعی از $\{x_n\}$ می گویند.

مثال24. ترادف $x_n=\frac{1}{n}\,,\ n\in\mathbb{N}$ را درنظرگرفته، دو ترادف فرعی از انرا بنویسید.

حل: ترادف های $y_n=\frac{1}{2n}$ و $z_n=\frac{1}{2n-1}$ عبارت از ترادف های فرعی مربوط ترادف فوق اند، آنهارا درذیل مقایسوی مینویسیم

$$x_n=\frac{1}{n}:\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10},\cdots$$

$$y_n=\frac{1}{2n}:\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\frac{1}{12},\frac{1}{14},\frac{1}{16}\ ,\cdots$$

$$x_n=\frac{1}{2n-1}:\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{11},\frac{1}{13},\frac{1}{15},\cdots$$

قضیه. اگر ترادف x_n متقارب به عدد x باشد، هر ترادف فرعی آن نیز متقارب به x است.

ثبوت. چون $\lim_{n\to\infty} x_n = x$، پس برای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی $N(\varepsilon)$ وجود دارد، طوریکه اگر $n \geq N(\varepsilon)$ باشد در آن صورت $|x_n - x| < \varepsilon$ است. حال ترادف فرعی x_{k_n} را در نظر میگیریم، ترادف اعداد طبیعی k_n متزایدا ست، یعنی

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < \cdots$$

واضح دیده میشود که $k_1 \geq 1$ ، $k_2 \geq 2$ ، $k_3 \geq 3$ ، ... و $k_n \geq n$ ، بنابرین، برای $k_n \geq n \geq N(\varepsilon)$ نیز داریم که $|x_{k_n} - x| < \varepsilon$ ، درنتیجه ترادف فرعی x_{k_n} نیزبه x متقارب میباشد●

ترادف انترولها. انتروالهای $I_n = [a_n , b_n]$ درحالیکه a_n و b_n ترادف های اعداد حقیقی با خاصیت $a_n < b_n$ باشند، عبارت از یک ترادف انتروالهااست. ترادف های انتروالها میتواند باز یا بسته باشند. اتحاد و تقاطع ترادف انتروالهای به ترتیب عبارت اند از

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cdots \quad , \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cdots$$

مثال *25*. با درنظرداشت ترادف انتروالهای $I_n = \left[-\frac{1}{n} , \frac{1}{n}\right]$ انتروالهای I_1 ، I_2 ، I_5 ، $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ را بنویسید.

حل:

$$I_1 = [-1 , 1] \quad , \quad I_2 = \left[-\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right] \quad , \quad I_5 = \left[-\frac{1}{5} , \frac{1}{5}\right]$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [-1 , 1] \qquad , \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{ 0 \}$$

مثال26. ترادف انترولهای $I_n=\left(0\,,\,\dfrac{n+1}{n}\right)$ در نظرگرفته I_1 ، I_3، I_4، I_5، ، $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ و $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ را معین کنید.

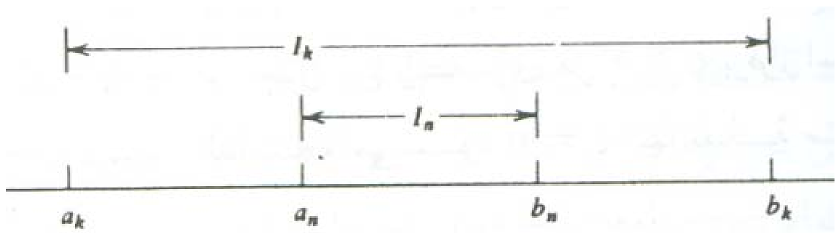
حل:

$$I_1=(0\,,\,2)\quad,\quad I_3=\left(0\,,\,\frac{4}{3}\right)\quad,\quad I_4=\left(0\,,\,\frac{5}{4}\right)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n=(0\,,\,2)\qquad,\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=(0\,,\,1)$$

انتروالهای متداخل. ترادف انتروالهای I_n، متداخل متداخل گفته میشود، اگر هر انتروال آن انتروال بعدی اش را در برداشته باشد، یعنی برای هر $n\in\mathbb{N}$ تداخل ذیل در آن صدق نماید:

$$I_{n+1}\subset I_n\quad,\quad n\in\mathbb{N}$$



قضیه. تقاطع ترادف انترولهای بستهء متداخل، یک ست خالی نیست.

ثبوت. اگر $I_n=[a_n\,,\,b_n]$ ترادف انترولهای بستهء متداخل باشد، واضح است که

$$[a_1\,,\,b_1]\subset[a_2\,,\,b_2]\subset[a_3\,,\,b_3]\subset\cdots\subset[a_n\,,\,b_n]\subset\cdots$$

یعنی

$$a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n\le\cdots\le b_n\le\cdots\le b_3\le b_2\le b_1$$

پس ترادف a_n متزاید و محدود است، بنابرین متقارب بوده و

$$\lim_{n\to\infty} a = a \le b_m \,,\, \forall m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a_m \le a \le b_m$$
$$\Rightarrow a \in I_n , \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \varnothing \bullet$$

قضیه (اصل انتروالهای متداخل). تقاطع ترادف انترولهای بستهء متداخل، در صورتیکه ترادف طول های آنها بصفر تقرب کند، فقط دارای یک عنصر است، به عبارت دیگر هر گاه $I_n = [a_n \,,\, b_n]$ یک ترادف انترولهای بستهء متداخل بوده و $\lim_{n\to\infty} \|I_n\| = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$باشد، درین صورت عدد یکتای $a \in \mathbb{R}$ موجود است طوریکه $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \varnothing$.

ثبوت. با در نظر داشت قضیه قبلی لااقل یکعدد حقیقی a وجود دارد، طوریکه

$$a_n \le a \le b_n \,,\, n \in \mathbb{N}$$

حال فرض کنیم این عدد a یکتا نباشد، یعنی عدد حقیقی دومی b نیز وجود دا شته باشد که

$$a_n \le b \le b_n \,,\, n \in \mathbb{N}$$

و بالفرض $a < b$ باشد، پس

$$a_n \le a < b \le b_n \,,\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < b - a < b_n - a_n$$

با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ است، میابیم که

$$0 < b - a < 0$$

واین نتیجه غیر ممکن است، یعنی $a = b$ بوده، عدد مطلوب یکتاست ●

قضیه (بولزانو- وایرشتراس). هر ترادف محدود، دارای یک ترادف فرعی متقارب میباشد.   (بدون ثبوت)

ترادف کوشی. ترادف x_n یک ترادف کوشی و یا ترادف اساسی گفته میشود، در صورتیکه برای هر عدد مثبت ε یک عدد طبیعی N وجود داشته باشد، طوریکه برای هر جوره اعداد طبیعی mو n بزرگتر از N شرط

$$\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$$

صدق نماید.

قضیه. هر ترادف متقارب، یک ترادف کوشی است.

ثبوت. فرض کنیم ترادف x_n متقارب بوده و $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$ باشد، در آن صورت برای هر عدد مثبت ε ا عداد طبیعی N_1 و N_2 وجود دارد طوریکه

$$\left|x_m - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \forall n \geq N_1$$

$$\left|x_n - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \forall n \geq N_2$$

بنابرین برای $N = max\left\{N_1 , N_2\right\}$ و اعداد طبیعی m و n طوریکه $m, n \geq N$ باشد، داریم

$$\left|x_m - x_n\right| = \left|\left(x_m - x\right) + \left(x - x_n\right)\right| \leq \left|x_m - x\right| + \left|x - x_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|x_m - x_n\right| < \varepsilon \quad , \quad m , n \geq N$$

درنتیجه x_n ترادف کوشی است ●

قضیه. هر ترادف کوشی، محدود است.

ثبوت. فرض کنیم ترادف x_n، یک ترادف کوشی باشد، آنگاه برای $\varepsilon = 1$ عدد طبیعی N وجود دارد، طوریکه برای $n \geq N$ شرط $\left|x_n - x_N\right| \leq 1$صدق میکند، بنابرین

$$\left|x_n\right| = \left|x_n - x_N + x_N\right| \leq \left|x_n - x_N\right| + \left|x_N\right| < 1 + \left|x_N\right|$$

حال اگر وضع کنیم

$$M := sup\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N|+1\}$$
نتیجه میگیریم که برای هر عدد طبیعی n نامساوات $|x_n| \le M$ صدق میکند، پس ترادف x_n محدود است ●

قضیه (کوشی). ترادف اعداد حقیقی x_n یک ترادف کوشی است، اگروتنها اگر متقارب باشد.

ثبوت. در قضیه قبلی ثبوت شد که هر ترادف متقارب، یک ترادف کوشی است، حال به اثبات میرسانیم که هر ترادف کوشی متقارب است:

فرضاً ترادف x_n، یک ترادف کوشی باشد، پس این ترادف محدود است و به موجب قضیه بولزانو- و ایرشتراس دارای یک ترادف فرعی متقارب x_{n_k} میباشد و اگر $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = x$ در نظر گیریم پس

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}\ , \forall n_k \ge N_1$$

وچون x_n ترادف کوشی است، عدد طبیعی N_2 موجود است طوریکه برای هر $m > N_2$ وهر $n > N_2$ داریم

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

بنابرین برای $N = max\{N_1, N_2\}$ و اعداد طبیعی m و n طوریکه $m, n \ge N$ باشد، داریم

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$\Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon,\ n \ge N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

درنتیجه ترادف x_n متقارب است ●

6. تمرین

پنج عنصر اول هر یک از ترادف های ذیل را بنویسید:

$$1.\ \left\{1+(-1)^n\right\} \quad , \quad 2.\ \left\{\frac{\cos n\pi}{n}\right\} \quad , \quad 3.\ \left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \quad , \quad 4.\ \left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$$

$$5.\ a_n=\frac{4}{8-7n} \quad , \quad 6.\ a_n=\sqrt{2} \quad , \quad 7.\ a_n=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad , \quad 8.\ a_n=\frac{n+1}{\sqrt{n}}$$

$$9.\ a_1=256,\ a_n=\sqrt{a_{n-1}},\ n>2 \quad , \quad 10.\ a_1=-1,\ a_n=n+a_{n-1},\ n>2$$

$$11.\ a_1=1,\ a_n=\left(a_{n-1}\right)^2+a_{n-1},\ n>2 \quad , \quad 12.\ a_1=2,\ a_n=3a_{n-1},\ n>2$$

لیمت هر یک از ترادف های ذیل را دریافت کنید:

$$13.\ \left\{\frac{5n+8}{n}\right\} \quad , \quad 14.\left\{\frac{2n+1}{3n-1}\right\} \quad , \quad 15.\ \left\{\frac{8n^2+5n-1}{1-3n+2n^2}\right\} \quad , \quad 16.\left\{\frac{2n}{n+\sqrt{n}}\right\}$$

$$17.\ \left\{\frac{3\sqrt{n}+8\sqrt[4]{n}}{5\sqrt{n}}\right\} \quad , \quad 18.\left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\} \quad , \quad 19.\ \left\{2^{\frac{5}{n}}\right\} \quad , \quad 20.\left\{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right\}$$

$$21.\ \left\{n^{\frac{1}{n+2}}\right\} \quad , \quad 22.\left\{(\ln n)^{\frac{1}{n}}\right\} \quad , \quad 23.\ \left\{\sqrt[n]{n}\right\} \quad , \quad 24.\left\{\int_0^\infty e^{-nx}dx\right\}$$

$$25.\ a_n=6\left(-\frac{5}{6}\right)^n \quad , \quad 26.\ a_n=\left(8-\frac{7}{8}\right)^n \quad , \quad 27.\ a_n=e^{-n}\ln n \quad , \quad 28.\ a_n=\frac{e^n}{n^4}$$

تقارب هر یک از ترادفهای ذیل را با در نظرداشت اینکه متزاید و از بالا محدود یا متناقص و از پایان محدود اند، نشان دهید:

$$29.\ \left\{\frac{n}{2^n}\right\} \quad , \quad 30.\left\{\ln\frac{n+1}{n}\right\} \quad , \quad 31.\ \left\{\frac{4n+5}{n}\right\} \quad , \quad 32.\left\{\frac{3n-7}{n^2}\right\}$$

چرا هرکدام از ترادف های ذیل متباعد اند:

$$33.\ \left\{1+(-1)^n\right\} \quad , \quad 34.\ \{\cos nx\} \quad , \quad 35.\ \left\{\sqrt{n}\right\} \quad , \quad 36.\left\{\frac{n^3-7n+5}{100n^2+220}\right\}$$

37. با در نظر داشت اینکه $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ است، اگر $\varepsilon=0.01$ انتخاب شود، عدد طبیعی N را طوری تعین کنید که برای تمام $n>N$ شرط $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0.01$ صدق نماید.

38. با در نظر داشت اینکه $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3}=2$ است، اگر $\varepsilon=0.01$ انتخاب شود، عدد طبیعی N را طوری تعین کنید که برای تمام $n>N$ شرط $\left|\frac{2n+1}{n+3}-2\right|<0.01$ صدق نماید.

39. ترادف انتروالهای متداخل را بنویسید که تقاطع آنها خالی باشد.

40. اگر $I_n=[a_n\,,\,b_n]$ ترادف انتروالهای بسته و متداخل باشد، ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty}a_n$ و $\lim_{n\to\infty}b_n$ وجود دارند.

41. برای $x_1>y_1>0$، ترادفهای $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$ و $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$ را در نظرگرفته نشان دهید که:

الف: ترادف y_n متزاید و از بالا محدود است، ب: ترادف x_n متناقص و از پایان محدود است.

ج: رابطه $\frac{x_1-y_1}{2}>x_{n+1}-y_{n+1}>0$ صدق میکند، د: $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$.

42. اگر $\{a_n\}$ تردف متقارب به عدد a و برای هر عدد طبیعی n شرط $\alpha<x_n<\beta$ صدق نماید، نشان دهید که $\alpha<a<\beta$ است.

لیمت ترادف های ذیل را دریافت کنید:

$$43.\ a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\quad,\quad 44.\ a_n=\frac{1}{n}\sin\left(n^2+1\right)\quad,\quad 45.\ a_n=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n+2}$$

46. اگرترادف $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ در حالیکه a_1 مثبت است، متقارب باشد، ثبوت کنیدکه $\lim_{n\to\infty}a_n=2$ است.

47. ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=0$ باشد، a_n ترادف کوشی است.

48. ترادفهای فرعی a_n و b_n از آن را طوری انتخاب کنید که a_n یک ترادف فرعی از b_n و b_n یک ترادف فرعی از ترادف اعداد جفت باشد.

ترادفهای را توسط عنصر عمومی آنها بنویسید که چند عنصر هر یک از انها داده شده است:

$$49.\ \ a_1=5\,,\ a_2=7\,,\ a_3=9\,,\ a_4=11,\ a_n=?$$

$$50.\ \ a_1=\frac{1}{2},\ a_2=-\frac{1}{4},\ a_3=\frac{1}{8},\ a_4=-\frac{1}{16},\ a_n=?$$

$$51.\ \ a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{2}{3},\ a_3=\frac{3}{4},\ a_4=\frac{4}{5},\ a_n=?$$

52. دو تراف متباعد را بنویسید که مجموع آنها یک ترادف متقارب باشد.

فصل سوم
لیمت و تمادیت توابع

آنالیز ریاضی – عبارت از آن قسمت ریاضی است که در آن مفاهیم مختلف لیمت بطور اصولی مورد استفاده قرار میگیرد. در فصل دوم، مفهوم لیمت ترادف ها (تقارب ترادفها) مطرح بحث قرار گرفت. درین فصل لیمت تابع تحت مطالعه قرار میگیرد. مفاهیم لیمت ترادف و توابع با همدگر مشابه اند و در بسیاری موارد لیمت تابع به کمک لیمت ترادف های معین توضیح و تحلیل شده میتواند.

1. مفاهیم اساسی لیمت توابع

لیمت تابع f در عدد c عبارت از l است، اگر با نزدیک شدن متحول x به c، قیمت $f\left(x\right)$ به l نزدیک شود و مینویسیم که

$$\lim_{x\to c} f\left(x\right)=l$$

مثال *1*. جهت تعین لیمت تابع $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(3x-1\right)$ در $x=4$ قیمت های این تابع را در جوار $x=4$ کوچکتر و یا بزرگتر از آن محاسبه مینماییم:

$$f\left(3.9\right)=5.35 \qquad f\left(4.1\right)=5.65$$

$$f\left(3.99\right)=5.485 \qquad f\left(4.01\right)=5.515$$

$$f\left(3.999\right)=5.4985 \qquad f\left(4.001\right)=5.5015$$

$$f\left(3.9999\right)=5.49985 \qquad f\left(4.0001\right)=5.50015$$

$$f\left(3.99999\right)=5.499985 \qquad f\left(4.00001\right)=5.500015$$

دیده میشودکه با نزدیک شدن متحول x به عدد 4 در دو حالت کوچکتر و بزرگتر، قیمت تابع به 5.5 نزدیک شده میرود، پس

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4}\left[\frac{1}{2}(3x - 1)\right] = 5.5 \cdot$$

تعریف لیمت. جهت توضیح منطقی و دقیق، مفهوم " نزدیک شود به" و " یا تقرب میکند به" لازم است یک روش فنی داشته باشیم که آنرا قرار ذیل تحت بحث قرار میدهیم:

عدد حقیقی l لیمت تابع f در عدد c گفته میشود، اگر برای هر عدد حقیقی مثبت ε، یک عدد مثبت δ وجود داشته باشد طوریکه برای هر x از مجاورت $(c-\delta\,,\,c+\delta)$، قیمت $f(x)$ شامل مجاورت $(l-\varepsilon\,,\,l+\varepsilon)$ باشد، درینجا $x \neq c$ فرض میشود و عدد δ مربوط ε میباشد. معمولاً مینویسیم که

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

به عبارت دگر

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in (x-\delta, x+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

عبارت فوق معادل است بااینکه:

لیمت تابع $f(x)$ مساوی به عدد l است زمانی که x به a تقرب نماید، اگر برای هر عدد حقیقی مثبت ε، یک عدد مثبت δ وجودداشته باشد طوریکه از نامساوات $|x-a| < \delta$ ، نامساوات $|f(x)-l| < \varepsilon$ بدست آید، یعنی

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

مثال *2.* مطابق تعریف فوق نشان میدهیم که است، قیمت های این تابع قرار ذیل مرتب میگردد

$$\begin{array}{lll}
3.9 < x < 4.1 & \Rightarrow & 5.35 < f(x) < 5.65 \\
3.99 < x < 4.01 & \Rightarrow & 5.485 < f(x) < 5.515 \\
3.999 < x < 4.001 & \Rightarrow & 5.4985 < f(x) < 5.5015 \\
3.9999 < x < 4.0001 & \Rightarrow & 5.49985 < f(x) < 5.50015 \\
3.99999 < x < 4.00001 & \Rightarrow & 5.499985 < f(x) < 5.500015
\end{array}$$

بنابرین برای $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ وجود دارد طوریکه

$$4-\delta < x < 4+\delta \Rightarrow 5.5-\varepsilon < f(x) < 5.5+\varepsilon$$

$$\Rightarrow -\delta < x-4 < \delta \Rightarrow -\varepsilon < f(x)-5.5 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x)-5.5| < \varepsilon$$

لهذا مطابق تعریف داریم که

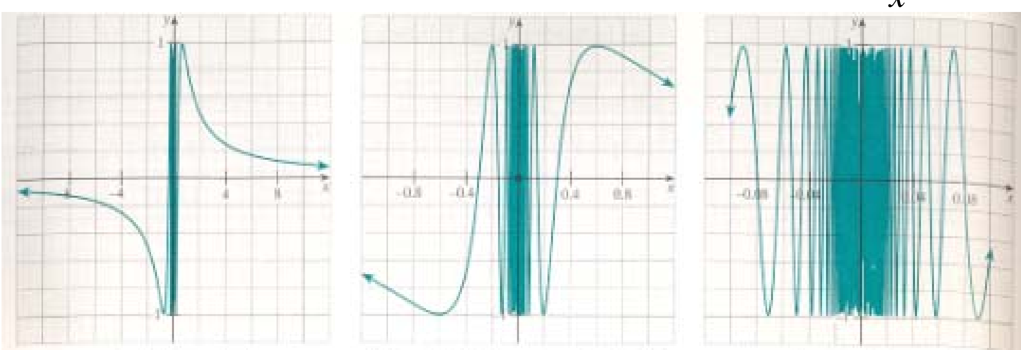
$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\left[\frac{1}{2}(3x-1)\right] = 5.5 \cdot$$

مثال3. به کمک جدول یاگراف $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ را ارزیابی کنید.

حل: قیمت های تابع $y=\sin\frac{1}{x}$ بینهایت دفعه در بین -1 و $+1$ نوسان می کند و به یک قیمت مشخص منتهی نمی گردد، بطور مثال جدول ذیل را در نظرگیرید:

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\cdots$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$\cdots$
$\sin\frac{1}{x}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1

پس زمانیکه متحول x بطرف 0 تقرب میکند، $y=\sin\frac{1}{x}$ به یک عدد معین تقرب نمی نماید، لهذا $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد. اشکال ذیل دیده شود.



a. Graph of $y=\sin\frac{1}{x}$ b. Detail of left hand graph on [−1, 1] c. Detail on [−0.1, 0.1]

مثال4. برای تابع $f(x)=3x+4$ ، نشان دهید که $\lim_{x\to 5} f(x)=19$ است.

حل: برای هر عدد مثبت ε و $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ میتوان نوشت که

$$0<|x-5|<\delta \Rightarrow |x-5|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x-5|<\varepsilon \Rightarrow |3x-15|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow |3x+4-15-4|<\varepsilon \Rightarrow |3x+4-19|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-19|<\varepsilon$$

قضیه (یکتایی لیمت). لیمت یک تابع در یک نقطه در صورت موجودیت، یکتا است، به عبارت دگر درصورتیکه $\lim_{x\to a} f(x)$ دارای دو قیمت l_1 و l_2 باشد، پس $l_1=l_2$ ا ست.

ثبوت: فرضاً $\lim_{x\to a} f(x)=l_1$ و $\lim_{x\to a} f(x)=l_2$، با توجه به تعریف لیمت برای هر عدد مثبت ε اعداد مثبت δ_1 و δ_2 موجود اند، طوریکه

$$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-l_1|<\frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad 0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-l_2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

برای $\delta=min\{\delta_1\,,\,\delta_2\}$ داریم که

$$|l_1-l_2|=|l_1-f(x)+f(x)-l_2|\le|l_1-f(x)|+|f(x)-l_2|$$

$$=|l_1 f(x)-l_1|+|f(x)-l_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow |l_1-l_2|<\varepsilon$$

درنتیجه عدد $|l_1-l_2|$ از هر عدد مثبت کوچک ε کوچکتر است، یعنی $l_1=l_2$ میباشد •

لیمت های یکطرفه

لیمت راست: اگر برای هر عدد $\varepsilon>0$، به یکعدد $\delta>0$ وجود داشته باشد، طوریکه برای هر عدد x با $0<x-a<\delta$ شرط $|f(x)-l|<\varepsilon$ صدق نماید، درین صورت l لیمت راست f در a گفته میشود و مینویسیم

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=l$$

لیمت سمت چپ: در صورتیکه برای هر عدد $\varepsilon > 0$، یکعدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد، طوریکه برای هر عدد x با $0 < a - x < \delta$ شرط $\left| f(x) - l \right| < \varepsilon$ صدق نماید، درین صورت l لیمت چپ f در a گفته میشود و مینویسیم

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

قضیه (شرط موجودیت لیمت). هرگاه تابع f در یک انتروا ل (ولوبغیرازعدد a) تعریف شده باشد، درین صورت $\lim_{x \to a} f(x)$ موجود است، اگر و تنها اگر $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ وجوداشته و با همدیگر مساوی باشند، درین حالت داریم که

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = l$$

به عبارت دیگر

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l = \lim_{x \to a^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l$$

ثبوت $\Leftarrow$: اگر $\lim_{x \to a} f(x) = l$ باشد، مطابق تعریف

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left| x - a \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to a^+} f(x) = l \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = l \end{cases}$$

ثبوت $\Rightarrow$: به برعکس فرض کنیم که

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

درین صورت برای هر $\varepsilon > 0$ اعداد $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ موجود اند، طوریکه

$$0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon \quad , \quad \delta_2 < x - a < 0 \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

حال با انتخاب $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ واضح است که

$$\left| x - a \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

درنتیجه

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \bullet$$

2. تشخیص و محاسبه لیمت توابع

بصورت عموم لیمت توابع به سه طریق میتواند تشخیص و یا محاسبه گردد که عبارت از

1. **استفاده ازترسیم گراف:** درین روش اگر بتوان گراف تابع را ترسیم کرد در آن صورت از گراف موجودیت و یا محاسبه لیمت بطور شهودی انجام میشود اما ممکن است ترسیم گراف توابع در بسیاری حالات پیچیده و طویل باشد بنابرین این روش بحیث متود مقدماتی مورد استفاده قرار میگیرد.
2. **استفاده ازجدول:** لیمت یک تابع را به کمک جدول قیمتهای متواتر و همجوار میتوان تعین کرد، این روش نیز مستلزم محاسبه عددی طویل و دقیق است، پس روش مذکور نیز مقدماتی و شهودی میباشد.
3. **متودالجبری:** به کمک قواعد الجبری و خواص توابع، لیمت های داده شده محاسبه و معین میگردد. این روش به نحو موثری عملی بوده و بیشتر مورد تطبیق قرارمیگیرد.

مثال5. لیمت های راست و چپ تابع $f\left(x\right)=\dfrac{x-5}{\left|x-5\right|}$ را در 5 معین کنید.

حل: با استفاده ازخاصیت الجبری قیمت مطلقه اعداد داریم که

$$\lim_{x\to 5^+} f\left(x\right) = \lim_{x\to 5^+}\frac{x-5}{\left|x-5\right|} = \lim_{x\to 5^+}\frac{x-5}{x-5} = \lim_{x\to 5^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 5^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 5^-}\frac{x-5}{\left|x-5\right|}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{-\left(x-5\right)}=\lim_{x\to 5^-}\left(-1\right)=-1$$

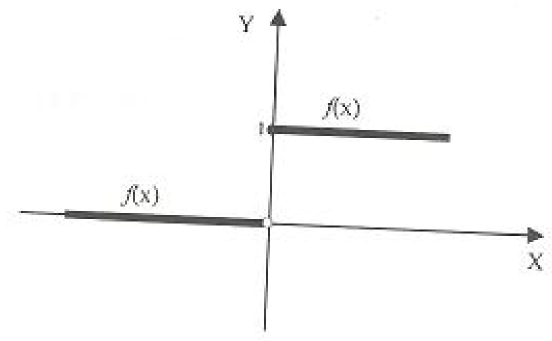
پس لیمت های راست و چپ f با همدیگرمساوی نبوده و بنابرین لیمت تابع در 5 وجودندارد.

مثال6. لیمت های راست وچپ تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ را در 0 معین کنید.

حل: با در نظرداشت گراف این تابع واضح دیده میشود که

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

باز هم لیمت های راست و چپ f با همدیگرمساوی نبوده و بنابرین لیمت تابع در 0 وجودندارد.



مثال7. قیمتهای $\lim_{x\to 0} f(x)$، $\lim_{x\to 1} g(x)$ و $\lim_{x\to 1} h(x)$ را با استفاده از گرافهای توابع مربوط که ذیلاً داده شده اند، دریافت کنید.

حل: (i) از گراف $y = f(x)$ واضح دیده میشودکه

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 5$$

(ii) با توجه به گراف $y = g(x)$ داریم که

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2,\ \lim_{x\to 1^+} g(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim_{x\to 1^+} g(x)$$

چون لیمتهای را ست و چپ بایکدیگر مساوی نیستند، پس $\lim_{x\to 1} g(x)$ وجود ندارد.

(iii) همچنین از گراف $y = h(x)$ بوضاحت میبینیم که

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = -2,\ \lim_{x\to 1^+} h(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x) = -2 \bullet$$

مثال8. مقادیر $\lim_{x\to 0} \sin x$ و $\lim_{x\to 0} \cos x$ را دریافت کنید.

حل: با استفاده از محاسبه قیمت های توابع $\sin x$ و $\cos x$ جدول ذیل مرتب میگردد

x	0.5	0.1	0.01	-0.01	-0.1	-0.5
$\sin x$	0.48	0.0998	0.0099998	-0.0099998	-0.0998	-0.48
$\cos x$	0.88	0.9950	0.9999500	0.99995	0.9950	0.88

ازجدول فوق دیده میشود

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0 = \sin 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1 = \cos 0 \bullet$$

قضیه (معیار ترادفی لیمت). هرگاه f در انتروال $(a\,,b)$ بغیر از $c\in(a\,,b)$ تعریف شده باشد، درین صورت $\lim_{x\to c} f(x)=l$ است، اگروتنها اگر برای هر ترادف x_n از $(a\,,b)$ طوریکه $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ باشد، شرط تقارب $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$ صدق نماید. یعنی (رضایی140)

$$\lim_{x\to c} f(x)=l \Leftrightarrow \forall x_n \in (a\,,b) : \lim_{n\to\infty} x_n = c\,,\, \lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$$

ثبوت $\Rightarrow$: هرگاه $\lim_{x\to c} f(x)=l$، x_n ترادفی ا ز $(a\,,b)$ باشرط $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ و $x_n \neq c$ باشد، پس برای هر عدد مثبت ε، یک عدد مثبت δ وجود دارد طوریکه از نامساوات $|x-c|<\delta$، نامساوات $|f(x)-l|<\varepsilon$ بدست آید، اما برای چنین x_n باید که $|f(x)-l|<\varepsilon$ باشد، بنابرین عدد طبیعی N وجود داردکه با هر عدد طبیعی n دارای شرط $n>N$ نامساوات $|f(x_n)-l|<\varepsilon$، درنتیجه $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l \bullet$

ثبوت $\Leftarrow$: فرض کنیم برای هر ترادف x_n از $(a\,,b)$ طوریکه $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ و $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$ بوده اما $\lim_{x\to c} f(x)\neq l$ باشد، آ نگاه لااقل یک عدد مثبت ε_0 موجود است که برای هر عدد طبیعی n با $\delta=\frac{1}{n}$ مشروط براینکه $0<|x_n-c|<\delta=\frac{1}{n}$ باشد، داریم که $|f(x_n)-l|>\varepsilon$ درنتیجه $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq l$ واین خلاف فرضیه ا ست لهذا $\lim_{x\to c} f(x)=l$ ،

خواص الجبری لیمت توابع. اگر برای توابع f و g، مفاهیم $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود داشته باشند، پس

$$1.\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

$$2.\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\,g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\,\lim_{x\to a} g(x)$$

$$3.\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ ,\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

ثبوت(مقدم *141*): فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=l_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=l_2$، برای هر ترادف دلخواه x_n طوریکه $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ باشد، روابط $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l_1$ و $\lim_{n\to\infty} g(x_n)=l_2$ صدق مینماید، بنابرخواص ترادف ها داریم که

$$1.\quad \lim_{n\to\infty}\left[f(x_n)+g(x_n)\right]=\lim_{n\to\infty} f(x_n)+\lim_{n\to\infty} g(x_n)=l_1+l_2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=l_1+l_2=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

بهمین قسم

$$2.\quad \lim_{n\to\infty}\left[f(x_n)g(x_n)\right]=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\lim_{n\to\infty} g(x_n)=l_1l_2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=l_1l_2=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$$

$$3.\quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)}=\frac{l_1}{l_2}\ ,\ l_2\neq 0$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}=\frac{\lim_{x\to a} f(x_n)}{\lim_{x\to x} g(x_n)}\quad\bullet$$

نتیجه. برای توابع f، g ، f_1 ، f_2 ، f_3 و... با اعدادثابت c و k داریم که

$$1.\quad \lim_{x\to a} k = k \quad , \quad k = const.$$

$$2.\quad \lim_{x\to a} x = a \quad , \quad \lim_{x\to a} x^n = a^n$$

$$3.\quad \lim_{x\to a}\left[cg(x)\right] = c\lim_{x\to a} g(x)$$

$$4.\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$5. \lim_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_n(x)$$

$$6.\quad \lim_{x\to a}\left[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x)\lim_{x\to a} f_2(x)\cdots\lim_{x\to a} f_n(x)$$

ثبوت: شماره های 1 و2 واضح اند.

3. برای تابع ثابت $f(x)=c$ داریم که

$$\lim_{x\to a}\left[cg(x)\right]=\left(\lim_{x\to a} c\right)\lim_{x\to a} g(x)=c\lim_{x\to a} g(x)$$

بهمین قسم بادرنظرداشت تابع ثابت $f(x)=-1$ میتوان نوشت که

$$4.\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)+\left(-g(x)\right)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}\left[(-1)g(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}(-1)\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} f(x)+(-1)\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

موارد 5 و6 بروش استقرا ء بسادگی اثبات شده میتوانند.

مثال9. نشان دهید که اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد، برای هر عدد طبیعی n داریم که

$$\lim_{x\to a}\left[\left(f(x)\right)^n\right]=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$$

حل:

$$\lim_{x\to a}\left[\left(f(x)\right)^n\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)f(x)f(x)\cdots f(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} f(x)\cdots\lim_{x\to a} f(x)=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$$

مثال10. با در نظرداشت قواعد میتوان نوشت که

$$I.\quad \lim_{x\to a} x = a \Rightarrow \lim_{x\to a} x^2 = \left(\lim_{x\to a} x\right)^2 = a^2 \Rightarrow \lim_{x\to a} x^n = \left(\lim_{x\to a} x\right)^n = a^n$$

$$II.\quad \lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} x} = \frac{1}{a} \Rightarrow \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} x}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

لیمت پولینوم ها. برای پولینوم

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

داریم که

$$\lim_{x\to a} P(x) = \lim_{x\to a}\left(a_n x^n\right) + \lim_{x\to a}\left(a_{n-1} x^{n-1}\right) + \cdots + \lim_{x\to a}\left(a_2 x^2\right) + \lim_{x\to a}\left(a_1 x\right) + \lim_{x\to a} a_0$$
$$= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 = P(a)$$

بنابرین

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

لیمت توابع ناطق .هرگاه در تابع ناطق $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ شرط $Q(a) \neq 0$ صدق نماید درانصورت

$$\lim_{x\to a} R(x) = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} P(x)}{\lim\limits_{x\to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = R(a)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a} R(x) = R(a)$$

مثالها

$$11.\quad \lim_{x\to 2}\left(x^2 - 4x - 1\right) = \lim_{x\to 2}\left(x^2\right) - \lim_{x\to 2}\left(4x\right) - \lim_{x\to 2} 1 = 2^2 - 4\cdot 2 + 1 = -3$$

$$12.\quad \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+2)} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$$

$$13.\quad \lim_{x\to 4} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 4}\left(25 - x^2\right)} = \sqrt{25 - 3^2} = 4$$

حالت مبهم $\frac{0}{0}$:

در هنگام محاسبه لیمت توابع وقتی که $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را داشته باشد، صورت و مخرج دارای فکتور مشترک $x-a$ میباشد که در اثر تجزیه صورت و مخرج اختصار گردیده، ابهام رفع میگردد.

$$14.\quad \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+4}=\frac{1}{7}$$

$$15.\quad \lim_{x\to 4}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

$$16.\quad \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{4-x^2}=\lim_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)=6$$

قضیه (مقایسه لیمت توابع). اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند طوریکه $f(x)<g(x)$، درین صورت با موجودیت لمیت ها داریم که

$$\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$$

ثبوت: برای ترادف متقارب x_n با شرط $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$، و با در نظرداشت قضیه مقایسه ترادف هاشرایط $f(x_n)<g(x_n)$ و $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\le\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)$ صادق اند، بنا برین

$$\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)\quad\bullet$$

مثال17. توابع $f(x)=5x^4-x^2+8$ و $f(x)=5x^4+x^2+8$ را در نظر میگیریم، واضح دیده میشود که $f(x)<g(x)$، اما $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(5x^4-x^2+8)=8$ و به همین قسم $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}(5x^4+x^2+8)=8$ میباشد، یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$ و یا بصورت عموم $\lim_{x\to a} f(x)\le\lim_{x\to a} g(x)$ ا ست.

قضیه فشردگی. هرگاه برای توابع $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ شرایط $f(x)<h(x)<g(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x)=l=\lim_{x\to a} g(x)$ صدق نمایند، در آن صورت

$$\lim_{x\to a} h(x)=l$$

ثبوت: برای ترادف متقارب اختیاری x_n طوریکه $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ باشد، واضح است که شرایط $f(x_n)\le h(x_n)\le g(x_n)$ و $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l=\lim_{n\to\infty} g(x_n)$ صادق اند، بنا بر قضیه ساندوویچ در ترادف های داریم که

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n)=l \Rightarrow \lim_{x\to a} h(x)=l \quad \bullet$$

3. لیمت توابع مثلثاتی

در بسیاری موارد تشخیص لیمت توابع مثلثاتی صراحت دارند، چنانچه

$$1.\quad \lim_{x\to a}\sin x=\sin a \quad , \quad 2.\quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

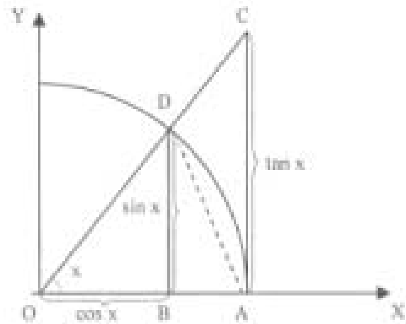
$$3.\quad \lim_{x\to a}\tan x=\tan a \quad , \quad 4.\quad \lim_{x\to a}\cot x=\cot a$$

و اما ممکن است در محاسبه لیمت توابع مثلثاتی حالات ابهام بوجود آید که مهمترین اشکال ابهام درین نوع لیمت شکل $\frac{0}{0}$ است و این حالت را میتوان با تشخیص یک فکتور عمده که نسبت $\sin x$ و زاوایه x است رفع نمود:

قضیه اساسی. زمانی که زاویه x بسمت صفر تقرب مینماید، نسبت $\sin x$ و x بطرف 1 تقرب می کند، یعنی

$$\boxed{\lim_{x \to o} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

ثبوت. زاویه x را طوریکه $0 < x < \frac{\pi}{2}$ است، بحیث زاویه مرکزی دایره با شعاع r در نظرمی گیریم شکل (3). مساحت های دو مثلث $\overset{\Delta}{OAD}$ و $\overset{\Delta}{OAC}$ را با قطاع OAD دایره متذکره مقایسه نموده داریم که



مساحت مثلث OAC > مساحت قطاع OAD > مساحت مثلث OAD

هریک ازمساحات فوق الذکر را جداگانه محاسبه می کنیم

$$OAD \text{ مساحت مثلث } = \frac{1}{2}\overline{OA}.\overline{BD} = \frac{1}{2}r\overline{BD}$$

$$OAD \text{ مساحت قطاع } = \frac{1}{2}xr^2$$

$$OAC \text{ مساحت مثلث } = \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}r\overline{AC}$$

بنابرین تساوی مضاعف قبلی شکل ذیل رامی گیرد

$$\frac{1}{2}r\overline{BD} < \frac{1}{2}xr^2 < \frac{1}{2}r\overline{AC}$$

اطراف نامساوات اخیررابه $\frac{2}{r^2}$ ضرب نموده میابیم که

$$\frac{\overline{BM}}{r} < x < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin x < x < \tan x$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

لهذا

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \blacksquare$$

مثالها

$$18. \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(2\theta)^2}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0} \frac{4\sin(2\theta)^2}{(2\theta)^2} = 4\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(2\theta)^2}{(2\theta)^2} = 4\cdot 1 = 4$$

$$19. \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x\cos 3x} = \left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x}\right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x}\right)$$

$$= 2\left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos 3x}\right) = 2\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$20. \quad = \lim_{x\to 0}\left(x \cot 3x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos 3x}{\sin 3x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \cos 3x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 3x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \cos 3x\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \cos 3x\right) = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

4. لیمت توابع طاقت نما و لوگارتمی

در لیمت توابع طاقت نما و لوگارتمی حالت مبهم 1^∞ به مشاهده می رسد و جهت رفع ابهام درین زمینه قضیه ذیل رول باز دارد.

قضیه اساسی:

1. هرگاه n بطرف بینهایت تقرب کند، ترادف $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ به عدد $e = 2,7182818284 \ldots$ تقرب می نماید، یعنی

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

2. هرگاه x بطرف بینهایت تقرب کند، تابع $\varepsilon(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ به عدد $e = 2,7182818284 \ldots$ تقرب می نماید، یعنی

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

این قضیه در ریاضی عمومی II به اثبات رسیده که درینجا از تکرار آن خود داری میکنیم. همچنین حالات مختلف لیمت توابع طاقت نما و لوگارتمی در مبحث لیمت ریاضی عمومیII طور مفصل تحت بحث قرارگرفته اندکه درینجا فقط بعضی مطالب اساسی آنها به اختصار یاد آوری میشوند.

نتیجه1:

$$1.\quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad ، 2.\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

ثبوت

$$1.\quad x=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad\lim_{\alpha\to0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$2.\quad u=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to0}\left[\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

قضیه

$$1.\quad\lim_{x\to0}\frac{\log_a\left(1+x\right)}{x}=\log_a e\quad,\quad 2.\quad\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

ثبوت: با استفاده از خواص لوگارتم داریم که

$$1.\quad\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1+x\right)\right]=\lim_{x\to0}\left[\log_a\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=\log_a\left[\lim_{x\to0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e\bullet$$

2. تعویض ذیل را در نظر می گیریم

$$y=a^x-1\Rightarrow a^x=1+y\Rightarrow x=\log_a\left(1+y\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{y}{\log_a\left(1+y\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\log_a\left(1+y\right)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{\log_a\left(1+y\right)}{y}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a\quad\bullet$$

نتیجه2:

$$i.\quad \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1 \qquad , \qquad ii.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

ثبوت

با استفاده از قضیه اخیر داریم که

$$1.\quad \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{log_e(1+x)}{x}=log_e e=1$$

$$2.\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=ln\,e=1 \quad \bullet$$

حالت عمومی لیمت تابع نمایی

1. هرگاه $\lim_{x\to a}u(x)$ و $\lim_{x\to a}v(x)$ وجودداشته و $\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)}\neq 1^{\infty}$ باشد، پس

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\left[\lim_{x\to a}u(x)\right]^{\lim_{x\to a}v(x)}$$

2. اگر لمیت $\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)}$، صورت مبهم 1^{∞}را اختیار نماید، پس

$$\lim_{x\to a}\left[u(x)\right]^{v(x)} = e^{p} \quad , \quad p:=\lim_{x\to a}\left[v(u-1)\right]$$

حالات فوق در ریاضی عمومیII ثبوت شده اند.

مثال21 . مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{ln\,x}$ را محاسبه کنید.

حل: با در نظرداشت تعویض $ln\,x=y \Leftrightarrow x=e^{y}$ و $y\to 0 \Leftrightarrow x\to 1$ میابیم که

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

مثال ها

$$22.\quad \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$$

$$23.\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{3}=e^2\cdot 1^3=e^2$$

یادداشت . درلمیت توابع مختلف حالات مبهم $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0.\infty$، $\infty-\infty$ و 1^{∞} قسما بررسی شده اند، در ریاضی عمومی II تحت عـنوان قواعـد هوپیتال، پنج حالت فوق بشمول دو حالت مبهم 0^0 و ∞^0 عمومی ترو با وضاحت بهتری به کمک مشتق تحلیل شده اند.

.5 مقادیر بینهایت بزرگ وتوابع محدود

مقدار بینهایت بزرگ: تابع $f(x)$ بنام مقدار بی نهایت بزرگ (متقارب به بینهایت) در $x \to a$ گفته میشود، هرگاه با نزدیک شدن متحول x بقدرکافی به عدد ثابت a، قیمت تابع $f(x)$ از هر عدد بزرگ مثبت، بزرگتر شده بتواند.

به عبارت دیگر $f(x)$ در $x \to a$ به بینهایت تقرب میکند، در صورتیکه برای هر عدد مثبت بزرگ M یکعدد مثبت δ وجود داشته باشد، طوریکه از نامساوات $|x-a|<\delta$، نامساوات $|f(x)|>M$ بدست آید، درین حالت مینویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \left(\forall M>0,\ \exists\delta>0: |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M\right)$$

و $f(x)$ در $x \to \infty$ بینهایت بزرگ است، برای هر عدد مثبت بزرگ M یک عدد مثبت N وجود داشته باشد، طوریکه از نامساوات $|x|<N$، نامساوات $|f(x)|>M$ بدست آید، و مینویسیم

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty \Leftrightarrow \left(\forall M>0\,,\,\exists N>0:\left|x\right|<N\Rightarrow \left|f\left(x\right)\right|>M\right)$$

مفهوم $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=\infty$ متضمن دو مفهوم $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=+\infty$ و یا $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=-\infty$ میباشد و ∞ بحیث یک عدد مدنظر نمی باشد.

مثال24 . تابع $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ در $x\to 0$ بینهایت بزرگ است، زیرا که در مجاورت مناسب 0، قیمت $\left|f\left(x\right)\right|$ بزرگتر از هر عدد بزرگ بوده میتواند، یعنی

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

در حالیکه

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \text{ و } \lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

توابع محدود

1. تابع $f(x)$ در یک ناحیه (انتروال) محدود نامیده میشود، هرگاه قیمت های $|f(x)|$ از یک عدد معین M بزرگتر شده نتواند، یعنی $|f(x)|\le M$.

2. تابع $f(x)$ زمانی که $x\to a$ محدود است، اگر در یک مجاورت $(a-\delta, a+\delta)$ از a محدود باشد.

3. تابع $f(x)$ برای $x\to\infty$ محدود است اگر عدد مثبت N موجود گردد طوریکه برای هـر x تحت شرط $|x|>N$ ، تابع $f(x)$ محدود باشد.

مثال*25*. تابع $f(x)=\sin x$ در $\mathbb{R}$ محدود است و تابع $g(x)=\frac{x+5}{x}$ برای $x\to\infty$ محدود می باشد.

خواص محدودیت توابع

1. هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=b\neq\pm\infty$ باشد، درین صورت $f(x)$ در $x\to a$ محدود است

2. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=b\neq 0$ باشد، پس $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ در $x\to a$ محدود است.

توابع بی نهایت کوچک (بینهایت کوچک ها)

تابع $\alpha(x)$ در $x \to a$ بی نهایت کوچک نامیده میشود، هرگاه $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ باشد.

مثال26: تابع $\alpha(x) = x^2$ در 0 $x \to 0$ ، $\beta(x) = x - 1$ در 0 $x \to 0$ ، $\gamma(x) = \dfrac{1}{x}$ در ∞ $x \to \infty$ و $\theta(x) = 2^x$ در $-\infty$ $x \to -\infty$ بی نهابت کوچک میباشند.

قضیه(شرایط وجودلیمت). برای اینکه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ باشد، لازم و کافـیست که $f(x)$ بحیث مجموع عدد ثابت b و تابع بی نهایت کوچک $\alpha(x)$ در $x \to a$ ارایه شده بتواند، یعنی

$$\left.\begin{matrix} f(x) = b + \alpha(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0 \end{matrix}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = b$$

ثبوت $\Rightarrow$:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = b + \alpha(x) \\ \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[b + \alpha(x)\right] \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b$$

ثبوت $\Leftarrow$: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ باشد، واضح است که $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) - b\right] = 0$

بنابرین تابع $\alpha(x) = f(x) - b$ یک بی نهایت کوچک است، یعنی

$$f(x) = b + \alpha(x) \quad , \quad \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0 \quad \bullet$$

خواص بینهایت کوچک ها

$1.$ اگر $\alpha(x)$ در $x \to a$ بی نهایت کوچکی باشد که در $x = a$ صفر نگردد پس $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\alpha\left(x\right)}$ یک تابع بی نهایت بزرگ است، برعکس هرگاه $f\left(x\right)$ بینهایت بزرگ در $x \to a$ باشد، تابع $\alpha\left(x\right) = \dfrac{1}{f\left(x\right)}$ در $x \to a$ بینهایت کوچک است، یعنی

$$\lim_{x\to a} \alpha\left(x\right) = 0 \wedge \alpha\left(a\right) \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{\alpha\left(x\right)} = \infty$$

$2.$ مجموع توابع بینهایت کوچک، بازهـم یک تابع بینهایت کوچک است.

$3.$ حاصل ضرب تابع بینهایت کوچک و تابع محدود یک تابع بینهایت کوچک می باشد

$4.$ هرگاه $\alpha(x)$ بینهایت کوچک و $u(x)$ تابعی که لیمت آن صفر شده نتواند باشند، پس تابع $v(x) = \frac{\alpha(x)}{u(x)}$ یک بینهایت کوچک است.

مقایسه بینهایت کوچک ها. هرگاه $\alpha\left(x\right)$ و $\beta\left(x\right)$ دو بینهایت کوچک در $x \to x_0$ باشند، درین صورت:

$1.$ بینهایت کوچک های $\alpha\left(x\right)$ و $\beta\left(x\right)$ را معادل مینامند، در صورتیکه

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha\left(x\right)}{\beta\left(x\right)} = 1$$

ومعادل بودن بینهایت کوچک های $\alpha\left(x\right)$ و $\beta\left(x\right)$ با علامت $\alpha\left(x\right) \sim \beta\left(x\right)$ ارایه میشود.

مثالها

$$27. \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x \quad , \quad 28. \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow e^x - 1 \sim x$$

$$29. \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 + 9}{x^3 + 20x - 1} = 1 \Rightarrow x^3 - x^2 + 9 \sim x^3 + 20x - 1$$

در محاسبه لیمت ها میتوان دو بینهایت کوچک رایکی به معدل دیگری تعویض کرد.

مثال30.

$$\begin{pmatrix} \sqrt[3]{x^3+2x^4} \sim \sqrt[3]{x^3} \\ ln(1+2x) \sim 2x \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} = \frac{1}{2}$$

2. گفته میشودکه، $\alpha(x)$ یک بینهایت کوچک با مرتبه بیشتر از $\beta(x)$است، اگر

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

چنانچه بی نهایت کوچک $\alpha(x) = 1-\cos x$دارای مرتبه بلندتر از $\beta(x) = x$ است زیرا

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

3. بهمین قسم، $\alpha(x)$ یک بی نهایت کوچک با مرتبه کمتر از $\beta(x)$است، اگر

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$$

4. ا گر $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l \neq 0$باشد، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$را بی نهایت کوچک های هم مرتبه مینامند. و مینویسیم که

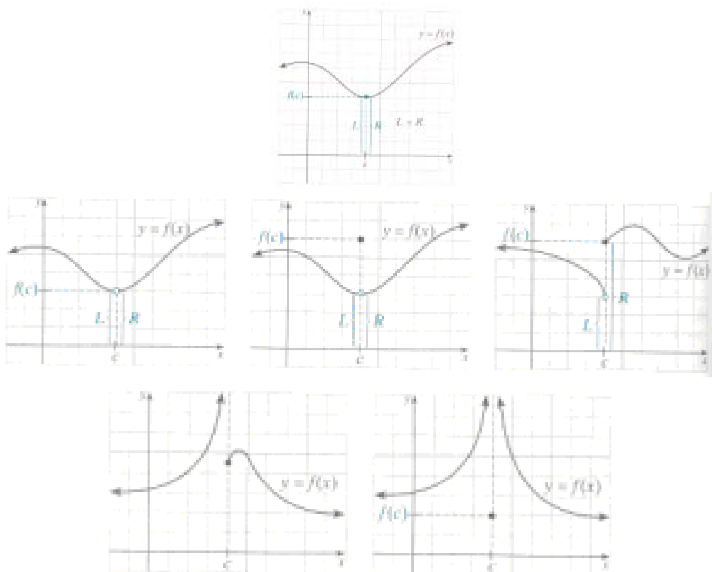
$$\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} l\beta(x)$$

واضح است که دو بی نهایت کوچک معادل، در عین زمان هم مرتبه اند.

5. وقتی که $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^p} = l$ باشد، $\alpha(x)$یک بی نهایت کوچک از مرتبه p نسبت به بینهایت کوچک $\beta(x)$است، افادهء $l(\beta(x))^p$ را بخش اصلی $\alpha(x)$ و p را مرتبه آ ن مینامند.

6. تمادیت توابع

یکی از مفاهیم اصلی انالیزریاضی خاصیت متممادی بودن (پیوستگی) توابع میباشدکه در بسا موارد کاربرد دارد. تابعی که در یک نقطه معین متمادی باشد، گراف تابع یک خط پیوسته میباشد، در ترسیم آن قلم ازکاغذ برداشته نمیشود و اما در تابع غیر متمادی گراف در همان نقطه جهش و یا انفصال پیدا می کند یعنی حین ترسیم و عبور از نقطهً انفصال قلم از روی کاغذ برداشته می شود. مفاهیم تمادیت و انفصال حالات مختلفی دارند، چند حالت در اشکال ذیل نشان داده شده اند.



1. در شکل اول $f(c)$ تعریف شده و $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ است و $f(x)$ در $x=c$ متمادی میباشد.
2. در شکل دوم $f(c)$ تعریف نشده اما $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود دارد و $f(x)$ در $x=c$ متمادی نیست.

3. در شکل سوم $f(c)$ تعریف شده اما $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ است و $f(x)$ در $x=c$ متمادی نمیباشد.
4. در شکل چهارم $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$ و تابع $f(x)$ در $x=c$ متمادی نمیباشد.
5. در شکل پنجم $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty \neq f(c)$ و تابع $f(x)$ در $x=c$ متمادی نمیباشد.
6. در شکل ششم $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty = \lim_{x\to c^-} f(x) \neq f(c)$ تابع $f(x)$ در $x=c$ متمادی نمیباشد.

تابع متمادی. تابع f در نقطه $x = x_0$ متمادی گفته میشود، هرگاه

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

دیده میشود که بخاطر متمادی بودن f در $x = x_0$ سه شرط ذیل الزامی اند:

1. باید که تابع f در مجاورتی از نقطه $x = x_0$ تعریف شده باشد، یعنی $f(x_0)$ موجودباشد.
2. موجودیت $\lim_{x\to x_0} f(x)$ یعنی تساوی لیمت های راست و چپ.
3. تساوی $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ بر قرارگردد.

در صورتیکه یکی از شرایط فوق صدق نکند، تابع در آن نقطه غیر متمادی است.
اگر تابع f در هر نقطه یک انتروا ل متمادی باشد گفته میشود که f در آن انتروال متمادی میباشد.

تعریف معادل متمادی بودن. تابع f در نقطه $x = x_0$ متمادی گفته میشود، هرگاه برای هرعدد مثبت ε، یک عدد مثبت δ وجوداشته باشد، طوریکه از نامساوات $|x - x_0| < \delta$ نامساوات $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ بدست آید، یعنی

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

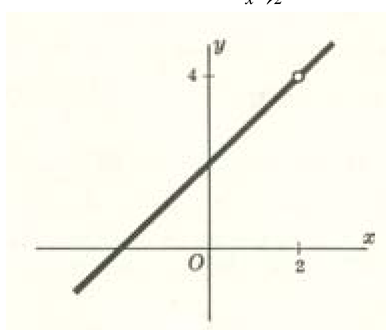
مثال31. آیا تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2 & , \quad x\neq 2\\ 5 & , \quad x=2\end{cases}$ در نقطه $x=2$ متمادی است؟

حل: دیده میشود که $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=12$ و $f\left(2\right)=5$ لذا

$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(2\right)$ در نتیجه این تابع در $x=2$ متمادی نیست.

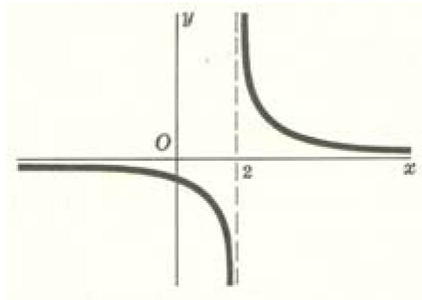
مثال32. آیا تابع $g\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ در نقطه $x=2$ متمادی است؟

حل: چون g در $x=2$ تعریف نشده، پس در آن متمادی نمی باشد، اما اگرعوض این تابع، تابع $g^{\bullet}\left(x\right)=x+2$ را در نظر بگیریم متمادی است، یعنی $g^{\bullet}$ در $x=2$ تعریف گردیده و برعلاوه $\lim_{x\to 2} g^{\bullet}\left(x\right)=4=g^{\bullet}\left(2\right)$ است .



مثال33 . آیا تابع $h\left(x\right)=\dfrac{1}{x-2}$ درنقطه $x=2$ متمادی است؟

حل : چون $\lim_{x\to 2^+} h\left(x\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to 2-} h\left(x\right)=-\infty$ پس لیمت های راست وچپ مساوی نبوده ، h در $x=2$ متمادی نمی باشد .



قضیه(خواص الجبری توابع متمادی). هرگاه توابع f و g متمادی باشند ، پس توابع $f+g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ نیزمتمادی اند .

ثبوت :برای نقطه متمادی $x=a$ بادرنظرداشت خواص لیمت داریم که

$$1.\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)$$

$$2.\quad \lim_{x\to a}\left[f(x)\,g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=f(a)\,g(a)$$

$$3.\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}\quad,\qquad g(a)\neq 0$$

بنابرین توابع $f+g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ متمادی میباشند •

نتیجه : اگر توابع f و g متمادی باشند ، توابع $f-g$ ، cf ونیزمتمادی اند، c عددثابت است

قضیه(تمادیت توابع مرکب)

1. اگرتابع f در $b=\lim\limits_{x\to a}g(x)$ متمادی باشد ، پس

$$\lim_{x\to a}f\left(g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)$$

2. ا گرتابع g در $x=a$ و f در $b=g(a)$ متمادی باشند، پس $f\circ g$ در $x=a$ متمادی است .

ثبوت : بنابرخواص لیمت وتمادیت داریم که

$$1.\quad \lim_{x\to a} f\left(g\left(x\right)\right)=\lim_{g(x)\to b} f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(b\right)=f\left(\lim_{x\to a} g\left(x\right)\right)$$

$$2.\quad \begin{matrix}\lim_{x\to a} g\left(x\right)=g\left(a\right)\\ \lim_{y\to b} f\left(y\right)=f\left(b\right)\end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to a} f\left(g\left(x\right)\right)=\lim_{g(x)\to g(a)} f\left(y\right)=\lim_{y\to b} f\left(b\right)=f\left(\left(a\right)\right)$$

بنابرین $f\circ g$ در $x=a$ متمادی است •

نتیجه : توابع $y=x^{\alpha}$ $\left(\alpha\in\mathbb{R}\right)$، $y=a^{x}$ $\left(a>0\right)$، $y=\log_{a}x$، $y=\sin x$ ، $y=\sin x$ وترکیب آنها متمادی اند ، بنابرین

$$1.\quad \lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)\right)^{\alpha}=\left(\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right)^{\alpha}\quad 2.\quad \lim_{x\to x_0} a^{f(x)}=a^{\lim_{x\to x_0} f(x)}\quad 3.\quad \lim_{x\to x_0} e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

$$4.\quad \lim_{x\to x_0}\left[\log_{a} f\left(x\right)\right]=\log_{a}\left[\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right]\quad 5.\quad \lim_{x\to x_0}\left[\ln f\left(x\right)\right]=\ln\left[\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right]$$

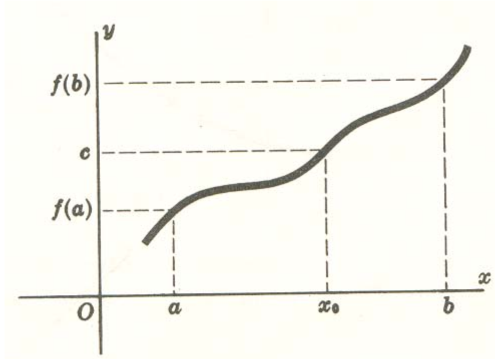
$$6.\quad \lim_{x\to x_0}\left[\sin f\left(x\right)\right]=\sin\left[\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right]\quad ,\quad 7.\quad \lim_{x\to x_0}\left[\cos f\left(x\right)\right]=\cos\left[\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right]$$

مثال 34. آیا تابع $p\left(x\right)=x^{2}-6x+8$ درنقطه $x=4$ متمادی است؟

حل : چون $\lim_{x\to 4} p\left(x\right)=0$ و $p\left(4\right)=4^{2}-6\times 4+8=0$ لذا

$\lim_{x\to 4} f\left(x\right)=f\left(4\right)$ بنابرین p در $x=4$ متمادی می باشد .

قضیه (قیمت وسطی). هرگاه تابع f درانتروا ل بسته $\left[a,b\right]$ متمادی بوده و c عدی دربین $f\left(a\right)$ و $f\left(b\right)$ باشد، پس یکعدد x_0 از انتروا ل $\left(a,b\right)$ وجود دارد که شرط $f\left(x_0\right)=c$ را صدق نماید .

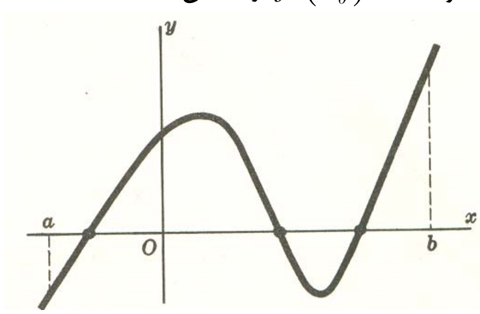


ثبوت . با درنظرداشت تمادیت تابع درانتروا ل مربوط ازشکل واضح است که برای هرعدد y از بین $f(a)$ و $f(b)$ ، یکعدد z ا زا نتروا ل (a,b) وجود دارد بطوریکه

$$f(z)=\lim_{x\to z} f(x)=y$$

پس برای $y=c$ نیزعدد $z=x_0$ از (a,b) موجود است طوریکه شرط $f(x_0)=c$ را صدق نماید ●

قضیه بولزانو (موقعیت جذرمعادله). اگر تابع f درانتروا ل بسته $[a,b]$ متمادی بـوده و $f(a)$ و $f(b)$ دارای اشاره های مختلف باشند ، درانصورت لاا قل یک عدد x_0 نتـروا ل (a,b) وجود دارد که شرط $f(x_0)=0$ را صدق کند .



ثبوت : چون 0 دربین $f(a)$ و $f(b)$ وا قع است ، بنابرقضیه فوق x_0 نتروا ل (a,b) وجود دارد که شرط $f(x_0)=0$ را صدق کند ●

مثال 35. نشان دهید که معادله $cos\,x = x^3 - x$ لااقل یک جذردرانتروا ل $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ موجود است.

حل : تابع $f(x) = cos\,x - x^3 + x$ را درنظرمیگیریم ، میابیم که

$$f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = cos\tfrac{\pi}{4} - \left(\tfrac{\pi}{4}\right)^3 + \tfrac{\pi}{4} \approx 1.008$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = cos\tfrac{\pi}{2} - \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^3 + \tfrac{\pi}{2} \approx -2.305$$

بنابرین حدا قل یک عدد x_0 نتروا ل $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ وجود دارد که شرط $f(x_0) = 0$ را صدق کند یعنی

$$cos\,x_0 - x_0^{\,3} + x_0 = 0 \Rightarrow cos\,x_0 = x_0^{\,3} - x_0$$

لهذا عدد x_0 یک جذرمعادله $cos\,x = x^3 - x$ میباشد •

7. تمرین

بااستفاده ازتعریف لیمت ثابت کنیدکه

$$1.\ \lim_{x\to 1}(3x) = 3 \quad , \quad 2.\ \lim_{x\to -5}(-4x + 3) = 23 \quad , \quad 3.\ \lim_{x\to\infty}\tfrac{3x+2}{10} = \tfrac{1}{2}$$

4. فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = -2$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 3$ باشند ، درینصورت لیمتهای ذیل رادریافت کنید:

$$(i).\ \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] \quad , \quad (ii).\ \lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] \quad , \quad (iii).\ \lim_{x\to a}\tfrac{f(x)}{g(x)}$$

5. اگربرای هـر x نامساوات $|g(x)| \le |f(x)|$ صادق بوده و $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ باشد ، ثابت کنیدکه $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ است .

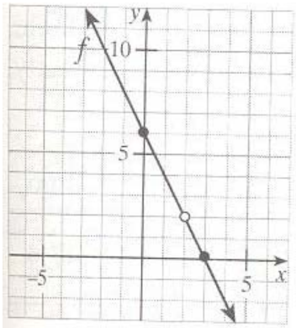
6. نشان دهید که $\lim_{x\to 1} f(x)$ برای تابع $f(x) = \begin{cases} -4 & , \quad x < 1 \\ 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$ وجودندارد .

7. نشان دهید که $\lim_{x\to 0} g(x)$ درحالیکه $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ باشد، وجودندارد.

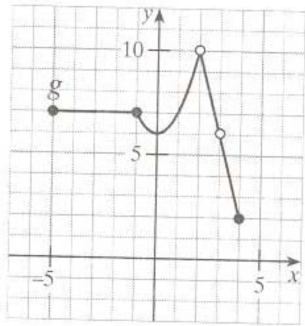
لیمت های ذیل را محاسبه کنید:

$$8.\ \lim_{x\to 2^+}\left(x^3 + 3x - 1\right) \quad , \quad 9.\ \lim_{x\to 0^+}\tfrac{x+1}{x^2 - x} \quad , \quad 10.\ \lim_{x\to\infty}\tfrac{3x^2+13x+4}{1+x+x^2} \quad , \quad 11.\ \lim_{x\to 0^-}\tfrac{x}{|x|}$$

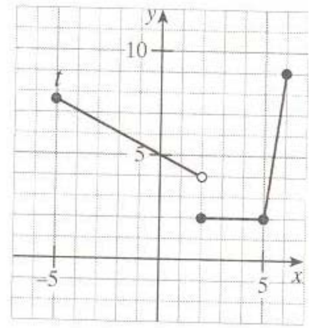
12. گراف های توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $t(x)$ قرارذیل داده شده اند:



Graph of f



Graph of g



Graph of t

با توجه به گراف های مذکور لیمتهای ذیل را دریافت کنید:

$i).\ \lim_{x\to 3^-} f(x)$, $ii).\ \lim_{x\to 2^-} f(x)$, $iii).\ \lim_{x\to 0^-} f(x)$, $iv).\ \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$v).\ \lim_{x\to 3} g(x)$, $vi).\ \lim_{x\to -1} g(x)$, $vii).\ \lim_{x\to 4^-} g(x)$, $viii).\ \lim_{x\to 3^+} g(x)$

لیمتهای ذیل را دریافت کنید:

$13.\ \lim_{x\to 0^+} x^4$, $14.\ \lim_{x\to 0^+} \cos x$, $15.\ \lim_{x\to 2^-}\left(x^2-4\right)$, $16.\ \lim_{x\to 3^-}\left(x^2-4\right)$

$17.\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-3}$, $18.\ \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}$, $19.\ \lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$, $20.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$

$21.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$, $22.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}$, $23.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$, $24.\ \lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{x}$

$25.\ \lim_{x\to 0.4}\left(|x|\sin\frac{1}{x}\right)$, $26.\ \lim_{x\to 0}\left(|x|\sin\frac{1}{x}\right)$, $27.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$, $28.\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}$

$29.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-10}{x-2}$, $30.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}$, $31.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{cox}$, $32.\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{x-1}$

$33.\ \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$, $34.\ \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-3}$, $35.\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$, $36.\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-1}$

$37.\ \lim_{z\to 1}\frac{x^2+z-3}{z+1}$, $38.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x-10}{3x^2+5x-7}$, $39.\ \lim_{u\to -2}\frac{4-u^2}{2+u}$, $40.\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$

$41.\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x-1}$, $42.\ \lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{x\sin\pi x}{1+\cos\pi x}$, $43.\ \lim_{x\to 6}\frac{\tan\frac{\pi}{x}}{x-1}$, $44.\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

$$45.\ \lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2-2x-3}{x-3}}\quad,\quad 46.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 9x}\quad,\quad 47.\ \lim_{x\to 0}\frac{\cot 3x}{\cot x}\quad,\quad 48.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}$$

$$49.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x\sec x}\quad,\quad 50.\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}\quad,\quad 51.\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$$

چرا لیمت های ذیل وجودندارند؟ توضیح کنید:

$$52.\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\quad,\quad 53.\ \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{x-2}}\quad,\quad 54.\ \lim_{t\to 2}\frac{t^2-4}{t^2-4t+4}\quad,\quad 55.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$56.\ \lim_{x\to 1}f(x),\ f(x)=\begin{cases}2 & , \quad x\ge 1\\ -5 & , \quad x<1\end{cases}\quad,\quad 57.\ \lim_{t\to -1}g(t),\ g(t)=\begin{cases}2t+1 & , \quad t\ge -1\\ 5t^2 & , \quad t<-1\end{cases}$$

کدام یک ازتوابع ذیل متمادی اند:

58. تغیردرجه حرارت شباروزی بحیث تابعی اززمان.

59. افزایش یومیه نفوس جهان بحیث تابعی اززمان.

60. تولیدات دستگاه تشله سازی به تناسب زمان.

نقاط غیرمتمادی توابع ذیل را تشخیص کنید:

$$61.\ f(x)=x^2-7x+3\quad,\quad 62.\ g(x)=\frac{3x+5}{2x-1}\quad,\quad 63.\ h(x)=\frac{3}{x^2-x}$$

$$64.\ F(x)=\sqrt{x}+\frac{3}{x}\quad,\quad 65.\ G(x)=\frac{5}{x^2-6x+8}\quad,\quad 66.\ H(x)=\frac{3}{x^2-9}$$

$$67.\ u(x)=\begin{cases}x^2-2, & x\ge 1\\ 2x-3, & x<1\end{cases}\quad,\quad 68.\ v(t)=\begin{cases}3t+2, & t\le 1\\ 5, & 1<t\le 3\\ 3t^2-1, & t>3\end{cases}\quad,\quad 69.\ w(x)=\begin{cases}x, & x\ge 1\\ 0, & x<1\end{cases}$$

لیمتهای ذیل را محاسبه کنید:

$$70.\ \lim_{x\to 0^+}\left(x^2e^{-x}\right)\quad,\quad 71.\ \lim_{x\to 0}\left(x^2e^{-x}\right)\quad,\quad 72.\ \lim_{x\to 0}e^{-x^3}\quad,\quad 73.\ \lim_{x\to 1}e^{-x^3}$$

$$74.\ \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}\quad,\quad 75.\ \lim_{x\to 1}(1+x)^{\frac{1}{x}}\quad,\quad 76.\ \lim_{x\to 0^-}e^{1/x}\quad,\quad 77.\ \lim_{x\to e}\left(x\ln x^2\right)$$

$78.\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$, $79.\ \lim_{x \to 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$, $80.\ \lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-x})^{e^x}$

فصل چهارم
سلسله های ریاضی

در اواخر قرن هفدهم و مخصوصا با کارهـای نیکـولای مرکـاتور و ویلیـام برونیکـر تیـوری سلسله های ریاضی انکشاف یافت، با ارایه بینوم نیوتن بحیث یک سلسله مهم، ایـن نظریـه تقویت گردید .در سال 1812 م بحث کامل و دقیقـی تقـارب سلسـله هـا ذریعـهء گـاوس مطرح شد و با استفاده از مفهوم لمیت درتقارب سلسله ها، سال 1821 م کلیات ایـن بخـش ریاضیات تهداب گذاری گردید. امروز نظریه ء سلسله ها بخشی بسیار مهم ریاضیات معاصر را تشکیل میدهد . درین فصل بحثی مختصری در زمینه مطرح می گردد.

1. مفاهیم اساسی سلسله های ریاضی

درین بحث مفاهیم ترادفها، سلسله های عددی، تقارب و تباعد سلسله ها، و بعضی سلسله های مقدماتی و خواص آنها معرفی میشوند.

ترا د ف ها*(Sequences)* . هرگاه ناحیهء تعریف تابع $f(x)$ فقط ست اعداد طبیعی درنظر گرفته شود ، درینصورت ست اعداد $a_k = f(k)$ یک ترادف عددی گفته می شود، اعداد a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... ، a_n و ... عنا صر ترادف اند، این ترادف را به $\{a_k\}$ ارایه مینمایند. درصورتیکه $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} f(k) = a$ وجودداشته باشد، ترادف a_k را متقارب و اگر لیمیت فوق موجود نباشد، متباعـد مینامند. در فصل سوم ترادفها مطرح بحث قرار گرفته اند.

سلسلهء های عددی . مجموع تمام عناصر ترادف عددی $\{a_k\}$ یعنی

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

بنام سلسلهء عدددی یاد می گردد، a_k عنصر k ام این سلسله گفته می شود . قیمت عددی سلسله یعنی S ، یک عدد معین و یا بینهایت بوده میتواند .

ترادف مجموع های قسمی . ترادف متشکل از مجموعه n عنصرمسلسل اولیه یک ترادف $\{u_n\}$ که عناصر آن شکل

$$S_n = u_1 + u_2 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \ldots .)$$

را دارد ، ترادف مجموع های قسمی سلسلهء $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ گفته میشود .

تقارب سلسه ها. در صورتیکه ترادف مجموع های قسمی S_n به عدد S تقرب نماید، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$$

گفته مبشود که سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ متقارب است ، سلسله ایکه متقارب نباشد، متباعد نامیده میشود.

مثال *1*. سلسلهء $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots$ را درنظر میگیریم، این سلسله متشکل از مجموع عناصر ترادف هندسی $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ است و میدانیم که

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

بنابرین سلسلهء مربوط متقارب است.

مثال *2*. نشان دهید که سلسله $\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K$ متباعد است .

حل: این سلسله درحالت انکشاف یافته عبارت است از

$$\sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

دیده میشود که مجموع قسمی سلسله شکل ذیل را دارای

$$S_n=\begin{cases}-1 \quad , \quad n=2m-1 \, , \, m\in\mathbb{N}\\ 1 \quad , \quad n=2m \quad , \quad m\in\mathbb{N}\end{cases}$$

پس ترادف S_n دارای لیمت نبوده ، بنابرین سلسله داده شده متباعد است.

سلسله ادغامی*(Colapsing Series)* . سلسله ایکه مجموعه قسمی اش را بتوان بحیث مجموعه های فرعی ارایه داد ، سلسله متلاشی گفته میشود، مانند سلسله ذیل

مثال*3* . نشان دهید که سلسله $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}$ متقارب است ، مجموع آنرا دریافت کنید.

حل: با استفاده از روش تجزیه به کسور قسمی میابیم که

$$\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

پس مجموعه قسمی سلسله داده شده شکل ذیل را دارد.

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

بنابرین لیمت مجموع قسمی عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

یعنی سلسله متقارب بوده مجموع آن 1 است.

قضیه(خطی بودن سلسله ها). اگرسلسه های $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ متقارب باشند ، پس سلسله $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b)_n$ برای اعدادثابت α و β متقاری است و

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_k+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

ثبوت: با استفاده از خاصیت خطی بودن لیمت ترادف ها داریم که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha a_k+\beta b_k\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\left(\alpha a_k+\beta b_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\sum_{n=1}^{n}a_k+\beta\sum_{n=1}^{n}b_k\right)$$
$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}a_k+\beta\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}b_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_k+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_k \quad \bullet$$

مثال4 . نشان دهید که سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2+k}-\frac{6}{2^k}\right)$ متقارب است ، مجموع آنرا دریافت کنید.

حل : چون $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}=1$ و $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$ ، با استفاده از خطی بودن سلسله ها داریم که

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{k^2+k}-\frac{6}{2^k}\right)=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{2^k}=4(1)-6(1)=-2 \quad \bullet$$

قضیه . هرگاه سلسلهء $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقارب و سلسلهء $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متباعد باشد، درینصورت سلسله ء مجموعی $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ متباعد است .

ثبوت : فرض کنیم سلسله $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ متقارب باشد، درانصورت با درنظرداشت خاصیت خطی بودن سلسله ها باید که سلسله

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)-\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

متقارب باشد و این غیرممکن است، لهذا سلسله مربوط متباعد است.

مثال5 . سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{k^2+k}+(-1)^k\right]$ متباعد است زیرا که سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}$ متقارب و سلسه

و سلسله $\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^K$ متباعد است.

سلسلهء هندسی . سلسلهء معمولی هندسی عبارت است از

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

سلسلهء هندسی برای $|r| \geq 1$ متباعد ودرحالت $|r| < 1$ متقارب است و

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar_k^2 = \frac{a}{1-r}$$

ثبوت . مجموع قسمی سلسله هندسی عبارت است ا ز

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

با ضرب کردن اطراف این رابطه با r داریم که

$$rs_n = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n$$

بنابرین

$$rs_n - s_n = \left(ra + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n\right) - \left(a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow (r-1)s_n = ar^n - a \Rightarrow s_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1},\ r \neq 1$$

اگر $|r| > 1$باشد، واضح است که ترادف s_n متقارب نیست، یعنی سلسله هندسی متباعد است و اما برای $|r| < 1$ داریم که

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar_k^2 = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right) = \frac{a(0-1)}{r-1} = \frac{a}{1-r}$$

یعنی سلسله متقارب میباشد.

مثال 6. تقارب و تباعد سلسله های ذیل را معین کنید:

$$i.\quad \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{3}{2}\right)^k \quad , \quad ii.\quad \sum_{k=0}^{\infty} 3\left(-\tfrac{1}{5}\right)^k$$

حل : i. درین سلسه $r = \frac{3}{2} > 1$ است ، پس سلسله متقارب ا ست .

ii . درسلسله $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{5}\right)^k$ دیده میشودکه $|r| = \frac{1}{5}$ ، پس این سلسله متقارب میباشد و

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(-\tfrac{1}{5}\right)^k = \frac{3}{1-\left(-\tfrac{1}{5}\right)} = \frac{3}{1+\tfrac{1}{5}} = \frac{3}{\tfrac{6}{5}} = 3\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{2}$$

مثال7. کسر متوا لی $15.4\,\overline{23}$ را با استفاده از سلسله هندسی بحیث کسر عام بنویسید.
حل:

$$15.4\,\overline{23} = 15 + 0.4 + 0.023 + 0.00023 + 0.0000023 + \cdots$$
$$= 15 + \frac{4}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100\,000} + \frac{23}{10\,000\,000} + \cdots$$
$$= 15 + \frac{4}{10} + \frac{23}{1000}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right] = 15 + \frac{4}{10} + \frac{23}{1000}\left[\frac{100}{99}\right] \bullet$$

قضیه(شرط لازمی تقارب سلسله ها) . هرگاه سلسلهء $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقارب باشد ، ا لزاما" $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ا ست .

ثبوت . با درنظر داشت ترادف $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ میتوان نوشت که

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(s_{n-1} + u_n\right) = \lim_{n} s_{n-1} + \lim_{n\to\infty} u_n = s + \lim_{n\to\infty} u_n$$
$$\Rightarrow S = S + \lim_{n\to\infty} u_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \;\bullet$$

قضیه(معیار تباعد). هـرگاه ترادف a_k متقارب به صفر نباشد، دران صورت سلسله $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متباعد است .

ثبوت: فرضاً سلسله $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متقارب باشد بنابر شرط لازمی باید که $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ و این خلاف فرضیه است و در نتیجه سلسله $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ متباعد میباشد.

مثال 8. نشان دهید که سلسله $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-300}{4k+750}$ متباعد است .

حل : دیده میشود که

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k-300}{4k+750} = \frac{1}{4} \neq 0$$

بنابرین سلسله فوق متباعد میباشد.

2. معیارهای تقارب سلسه های عددی

درین پاراگراف معیارهای مشخص تقارب سلسله ها تحت مصالعه قرار میگیرند، البته این معیارها هر کدام دارای خواص معین خود بوده و تقارب سلسله ها بوسیله آنها ارزیابی شده میتواند.

معیار مقایسوی مستقیم (شرط کافی تقارب وتباعد)

درصورتیکه عناصر ترادف های a_k و b_k منفی نبوده و $a_k \le b_k$ باشد، پس

1. اگرسلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ متقارب باشد ، سلسهء $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ نیزمتقارب است و $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.
2. وقتی که سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متباعد باشد ا لزاماً سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ نیزمتباعد ا ست .

ثبوت : با درنظرداشت خاصیت مقایسوی ترادفهاداریم که

$$a_k \le b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

ا ز رابطه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ واضح است که ازتقارب $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$، تقارب $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ وازتباعد $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$، تباعد $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ بدست می آید ●

مثال 9 . سلسله ء ذیل را بررسی میکنیم

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

اگر این سلسه با سلسلهء هارمونیک مقایسه شود، میبینیم که

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

و چون سلسله هارمونیک یعنی $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ متباعد است، بنابرین سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ نیز متباعد میباشد.

مثال 10 . تقارب سلسله $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+1}$ را ارزیابی کنید.

حل: برا ی $k \geq 0$ واضح ا ست که

$$3^k+1 > 3^k > 0 \Rightarrow \frac{1}{3^k+1} < \frac{1}{3^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

بنا بر معیار مقایسوی سلسله $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+1}$ متقارب است.

معیار مقایسوی حدی . هـرگاه ترادف های a_k و b_k برای k بقدرکافی بزرگ دارای قیمت های مثبت باشند و

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$$

طوریکه l عددمثبت متناهی یعنی $0 < l < \infty$ باشد. پس سلسله های $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ همـزمان متقارب یا متباعد اند. (ثبوت معتل)

مثال 11 . تقارب و یا تباعد سلسله $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2+k+1}$ را معین کنید.

حل: برای $a_k = \frac{1}{k}$ و $b_k = \frac{2k+1}{k^2+k+1}$ داریم که

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^2+k}{k^2+k+1} = 2$$

و چون سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ متباعد است، پس سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2+k+1}$ نیز متباعد میباشد.

مثال12. تقارب و یا تباعد سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k-1}$ را معین کنید.

حل: برای $a_k=\frac{1}{2^k-1}$ و $b_k=\frac{1}{2^k}$ داریم که

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^k}{2^k-1}=1$$

و چون سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ متقارب است، پس سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k-1}$ نیز متقارب میباشد.

معیارنسبت (معیاردلامبر) . هرگاه عناصر سلسلهء $\sum_{n=1}^{\infty}a_k$ اعداد مثبت بوده و $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ باشد ، پس

1. اگر $l<1$ باشد، سلسلهء فوق متقارب است.
2. سلسلهء مذکورمتباعداست درصورتیکه $l>1$ باشد.
3. درحالت $l=1$ باشد ، نمیتوان تقارب و یاتباعد سلسله را تشخیص داد.

ثبوت : 1 . اگر $l<1$ باشد،عدد R را درنظر میگیریم طوریکه $0<l<R<1$ ، پس عدد طبیعی N وجود دارد، طوریکه برای $n>N$ داریم

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<R\Rightarrow a_{n+1}<a_nR$$

ازینجا میابیم

$$\begin{aligned}
&a_{N+1}<a_NR\\
&a_{N+2}<a_{N+1}R<a_NR^2\\
&a_{N+3}<a_{N+2}R<a_{N+1}R^2<a_NR^3\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

چون $0 < R < 1$ ، بنابرین سلسله هندسی $\sum_{k=1}^{\infty} a_N R^k$ متقارب است ، لذا سلسله کوچکتر

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots + a_{N+n} + \cdots$$

نیز متقارب است و درنتیجه سلسله

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$$

نیز متقارب میباشد .

3. اثبات این مرحله کاملاً مشابه مرحله 1 صورت میگیرد، با تفاوت اینکه R را طوری انتخاب میکنیم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > R > 1$$

پس عدد طبیعی M وجود دارد بطوریکه $a_{M+k} > a_M R^k$.

4 . در این حالت سلسله های $\sum_{i=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k}$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ را درنظر گیریم

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$$

درحالیکه سلسله اول (هارمونیک) متباعد و دوم متقارب است ●

مثال13. تقارب یا تباعد سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ را آزمایش کنید .

حل. برای $u_n = \frac{1}{n!}$ دیده میشود که

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

لهذا این سلسله متقارب است .

مثال14. سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$ راارزیابی میکنیم . برای $u_n = \frac{2^n}{n}$ داریم که

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+n}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{2^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$$

بنا برین سلسلهء مطلوب متباعد است .

مثال15. درحالیکه سلسلهء هارمورنیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعد است، اما از معیاردلامبر متباعد بـودن آن تثبیت شده نمیتواند، زیرا که برای $u_n = \frac{1}{n}$ لمیت مورد نظر $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ است .

معیار جذری (معیارکوشی) . هـرگاه عناصر a_k در سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ منفی نبوده و $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$ باشد، درینصورت

1. سلسلهء فوق متقارب است ، اگر $l < 1$ باشد.
2. برای $l > 1$ سلسله متباعد است.
3. هرگاه $l = 1$ باشد ، تقارب و یا تباعد سلسله ازین معیارتشخیص شده نمیتواند .

ثبوت : $1.$ وقتیکه $l < 1$ باشد، برای هر عدد r طوریکه $l < r < 1$ باشد، با درنظرداشت تعریف لیمت عدد طبیعی N وجود دارد، طوریکه برای هرعدد طبیعی $k \ge N$ داریم که

$$\sqrt[k]{|a_k|} < r \Rightarrow |a_k| < r^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \sum_{k=1}^{\infty} r^k$$

و چون $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ متقارب است، پس $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ نیز متقارب بوده درنتیجه $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ مطلق متقارب است. اثبات موارد 2 و 3 نیزمشابه اثبات شده میتواند •

مثال16. برای $a_k = (\frac{k}{2k+1})^k$ ازسلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$ دیده میشود که

$$l = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2} < 1$$

بنابرین این سلسله متقارب می باشد.

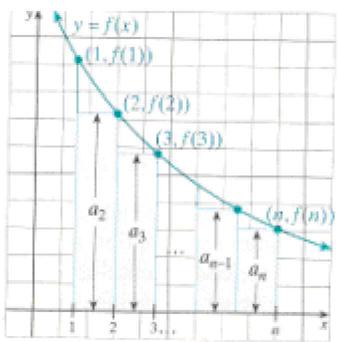
مثال17. تقارب و تباعد سلسلهء $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln k}\right)^{k}$ را بررسی کنید .

حل . برای $u_k=\left(\frac{1}{\ln k}\right)^{k}$ میبینیم که

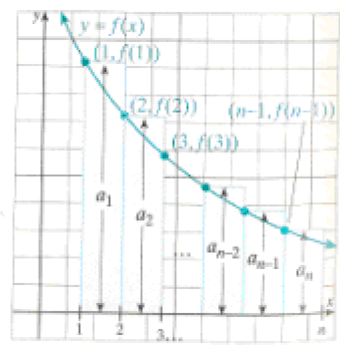
$$l=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{1}{\ln k}\right)^{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln k}=0<1$$

لهذاسلسله فوق متقارب است .

معیار انتیگرال . هـرگاه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ سلسلهء با عناصرمثبت، تابع $f(x)$ متمادی و متناقص برای $x\geq 1$ بوده و $f(n)=a_n$ با $n\geq 1$ باشد، پس سلسله $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و انتگرال غیرعادی $\int_1^{\infty}f(x)dx$ همـزمان متقارب و یا متباعد اند.



$f(k+1)=a_{k+1}$



$f(k)=a_k$

ثبوت : مساحت محدود بین گرا ف $y=f(x)$ و محور افقی در انتروال $[1,n]$ را مطابق اشکال ذیل در نظریم میگیریم. مجموع مستطیل های شکل اول عبارت از $a_2+a_3+\cdots+a_n$ و از شکل دوم $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ میباشد، واضح است که

$$a_2+a_3+\cdots+a_n\leq\int_1^n f(x)dx$$

بنابرین

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)\,dx \quad \cdots \quad (i)$$

از شکل دوم داریم

$$\int_0^{n+1} f(x)\,dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \cdots \quad (ii)$$

با مقایسه روابط (i) و (ii) میابیم که

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)\,dx$$

اگر انتگرا ل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ متقارب باشد، از سمت راست رابطه اخیر بوضاحت دیده میشود که سلسله $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب است و درصورتیکه انتگرال متذکره متباعد باشد، سمت چپ رابطه اخیر متباعد بودن این سلسله را نشان میدهد. بهمین قسم با فرض اینکه سلسه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب یا متباعد باشد، تقارب و یا تباعد انتگرال $\int_1^{\infty} f(x)dx$ بدست می آید •

سلسلهء هارمونیک . سلسلهء $\sum_{n=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ بنام سلسلهء هارمونیک یاد می شود و متباعد است .

ثبوت : تابع $f(x) = \dfrac{1}{x}$ برای $x > 0$ دارای قیمتهای مثبت و متناقص است و

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty$$

چون $f(k) = \dfrac{1}{k} = a_k$. بنابرین با درنظرداشت معیار انتگرال، سلسله هارمونیک متباعد است •

مثا ل18. (سلسلهء دیریکله) . سلسلهء دارای شکل

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$$

را که در ان p عددثابت است ، بنام سلسلهء دیریکله (سلسله p) یاد می کنند، این سلسله برای $p > 1$ متقارب و برای $p \le 1$ متباعد میباشد.

ثبوت. برای $p > 1$ داریم که

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} xdx = \int_1^\infty x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b x^{-p} dx\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left[b^{1-p} - 1\right] = \frac{1}{p-1}$$

بنابرین $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ متقارب بوده و بالاثر سلسلهء

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots$$

متقارب است .اما می دانیم که برای $p \le 1$ انتیگرال $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ متباعد می باشد یعنی

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \infty$ ، درنتیجه سلسلهء دیریکله برای $p \le 1$ متباعد است ●

تابع زیتا. تابع ایکه از سلسلهء دیریکله بصورت $\xi(\alpha) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ برای $\alpha > 0$ تشکیل میشود، بنام تابع زیتای ریمان یاد می گردد، تابع زیتا در آنالیز ریاضی معروف است.

3. سلسلهء متناوب

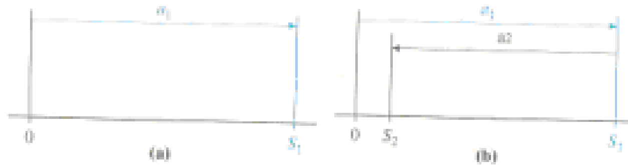
عبارت از سلسله ایست که اشاره های عناصر آن متناوب باشند، این سلسله دارای اشکال ذیل است :

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

درحالیکه a_1 ، a_2 ، a_3 ... اعداد مثبت اند .

قضیه لایپ نیتز(معیارسلسله متناوب) . هرگـاه تـرادف a_k مثبـت و متنـاقص بـوده ، $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ باشد ، پس سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ متقارب است و قیمـت مجمـوعی آن از عنصر اول a_1 بیشتر نمی باشد .



ثبوت : مجموع های قسمی مشخص ذیل را درنظر میگیریم.

$$s_2\ ,\ s_4\ ,s_6\ ,\ s_8\ ,\cdots,\ s_{2k}\ ,\cdots$$

چون

$$s_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

بنابر متناقص بودن ترادف a_k برای هر عدد طبیعی k شرط $a_k - a_{2k} \geq 0$ صدق میکند، پس

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2k}$$

یعنی ترادف مجموع های قسمی s_{2n} یکنواخت متناقص است و قرار ذیل نیز ارایه میگردد.

$$s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$$

درنتیجه

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ s_{2k} \leq a_1$$

بنابرین

$$\lim_{n\to\infty} s_{2k} = s \leq a_1$$

همچنین $s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1}$ و $\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = s$ لهذا

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} = s \Rightarrow \lim_{k\to\infty} s_k = s$$

درنتیجه این سلسله متناوب ، متقارب است ●

مثال*19*. سلسله متناوب و متقارب $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^4}$ را درنظر میگریم.

الف: اگر مجموع پنج عنصر اول آنرا بحیث قیمت تقریبی سلسله بپذیریم، خطای محاسبه را تخمین کنید.

ب : مجموع چند عنصر این سلسله را بحیث قیمت تقریبی آن تا سه رقم دقیق بعد از اعشاری میتوان پذیرفت؟

حل:

الف : برای $a_k = \frac{1}{k^4}$ میدانیم که

$$\left|s - s_4\right| \le a_5 = \frac{1}{5^4} = 0.0016$$

$$s_4 = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \approx 0.9459394$$

بنابرین

$$\left|s - 0.945939\right| \le 0.0016 \Rightarrow -0.0016 \le s - 0.945939 \le 0.0016$$

$$\Rightarrow 0.945939 - 0.0016 \le s \le 0.945939 + 0.0016$$

$$\Rightarrow 0.9443394 \le s \le 0.9475394$$

لهذا قیمت $s \approx 0.94$ تا دو رقم بعد از اعشار دقیق است.

ب : فرضاً مجموع nعنصر از سلسله را بحیث قیمت تقریبی آن تا سه رقم دقیق بعد از اعشاری قبول کنیم در آن صورت خطای محاسبه عبارت است از

$$\left|s-s_n\right| \le a_{n+1} \le 0.0005 \Rightarrow a_{n+1} \le 0.0005 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^4} \le 0.0005$$

$$\Rightarrow \frac{1}{0.0005} \le (n+1)^4 \Rightarrow \sqrt[4]{2000} \le n+1 \Rightarrow 6.687403-1 \le n+1$$

$$\Rightarrow n \ge 5.687403 \Rightarrow n \ge 6$$

لهذا عنصراول سلسله بحیث قیمت تقریبی آ ن تا سه رقم بعد از اعشاری دقیق است . و اما

$$s \approx s_6 = \frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4} \approx 0.94677$$

$$a_7 = \frac{1}{2^7} = 0.00042 \Rightarrow \left|s-0.94677\right| \le 0.00042$$

$$\Rightarrow 0.00042 \le s-0.94677 \le 0.00042$$

$$\Rightarrow 0.94677-0.00042 \le s \le 0.00042+0.94677$$

$$\Rightarrow 0.94635 \le s \le 0.94719 \Rightarrow s \approx 0.947 \bullet$$

تخمین خطای سلسله متناوب . هرگاه ترادف a_k مثبت و متناقص بوده ، $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ باشد، تفاوت بین قیمت سلسله $s=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ و مجموع قسمی $s_n=\sum_{n=1}^{n}(-1)^{n+1}a_n$ از عنصر a_{n+1} بیشتر نمی باشد یعنی

$$\left|s-s_n\right| \le a_{n+1}$$

ثبوت :

$$s-s_n = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

$$=(-1)^{n+2}\left[a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+a_{n+5}-a_{n+6}-a_{n+7}+\cdots\right]$$

$$=(-1)^{n+2}\left[a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-(a_{n+4}-a_{n+5})-(a_{n+6}-a_{n+7})-\cdots\right]$$

$$\Rightarrow s-s_n=(-1)^{n+2}\left[a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-(a_{n+4}-a_{n+5})-(a_{n+6}-a_{n+7})-\cdots\right]$$

چون هریک از حدود بین قوس های کوچک مثبت است ، بنابرین

$$\left|s-s_n\right|=\left|a_{n+1}-\left(a_{n+2}-a_{n+3}\right)-\left(a_{n+4}-a_{n+5}\right)-\left(a_{n+6}-a_{n+7}\right)-\cdots\right|\le a_{n+1}$$
$$\Rightarrow\left|s-s_n\right|\le a_{n+1}\quad\bullet$$

مثال$\boldsymbol{20}$. نشان دهید که سلسلهء متناوب $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ متقارب است .

حل: چون ترادف $a_k=\frac{1}{k}$ متناقص بوده و $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$ است بنابرین این سلسله متقارب میباشد .

مثال$\boldsymbol{21}$. نشان دهید که برای $p>0$ سلسلهء متناوب $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^p}$ متقارب است.

حل : برای ترادف $a_k=\frac{1}{k^p}$ واضح است که $\lim_{k\to\infty}a_k=0$ و برعلاوه

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\frac{1}{(k+1)^p}}{\frac{1}{k^p}}=\frac{k^p}{(k+1)^p}<1\quad\Rightarrow\quad a_{k+1}<a_k$$

پس ترادف a_k متناقص میباشد، بنابرین سلسله متناوب داده شده متقارب است.

4. تقارب مطلق و مشروط

1. سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ مطلق متقارب نامیده میشود، اگر سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ متقارب باشد.

2. در صورتیکه سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ متقارب بوده ولی سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ متباعد باشد، سلسلهء اولی را متقارب مشروط مینامند .

از مقایسهء سلسله های $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ و $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ واضح دیده میشود که : **هر سلسلهء مطلق متقارب، متقارب است .**

اگر تمام عناصر یک سلسله هم اشاره باشند،آن سلسه مطلق متقارب است.

مثال22. سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ متقارب است اما این سلسله مطلق متقارب نمی باشد، زیرا که سلسلهء هارمونیک $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k}\right|$ متقارب نیست، یعنی سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ متقارب مشروط است.

مثال23.سلسلهء $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$مطلق متقارب میباشد .

ترتیب و گروپ بندی عناصر یک سلسله

1. هـرگاه یک سلسله مطلق متقارب باشد، به هـر ترتیبیکه عناصر آن جمع گردد، در قیمت مجموعی سلسله تغییری بمیان نمی آید.
2. سلسله ایکه متقارب مشروط باشد، قیمت آن با تغییر ترتیب عناصر، تغییرپذیر است.
3. باگروپ بندی عناصرسلسله متقارب طوریکه ترتیب آنها تغییر نکند، سلسلهء جدیدی دارای عین قیمت بدست می آید .
4. در عملیه برعکس گروپ بندی، یعنی تغیراتیکه در آن قوسهای گروپ بندی حذف شوند، ممکن است مجموع سلسله تغییر یابد.

مثال 24. مجموع سلسله هندسی ذیل را در دو شکل گروپ بندی نموده محاسبه میکنیم:

$$s = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\frac{1}{252}-\cdots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

گروپ بندی اول

$$s=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{128}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\cdot$$

گروپ بندی دوم

$$s=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+\left(-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)+\left(-\frac{1}{128}+\frac{1}{252}\right)+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{64}-\cdots=1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)=1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{2}{3}\cdot$$

دیده میشود که مجموع سلسله از دو نوع گروپ بندی یکسان است.

مثال25. مجموع سلسله $s=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$ را در دو شکل تغییر یافته عناصرش که قوسهای گروپ بندی در ان حذف میشوند محاسبه میکنیم:

$$s=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots=\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{7}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\cdots=1$$

ازطرف دیگر

$$s=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots=\frac{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)}{2}+\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)}{2}+\frac{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)}{2}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\cdots=\frac{1}{2}$$

دیده میشود که در مجموع ساختن سلسله بدو طریق عکس گروپ بندی، دو قیمت مختلف بدست می آید که غیرممکن است.

مثال26 . سلسله $s=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ را درنظر میگیریم:

$$s=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\frac{1}{16}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{18}-\frac{1}{20}+\frac{1}{22}-\frac{1}{14}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right]=\frac{1}{2}s\Rightarrow s=\frac{1}{2}s\Rightarrow s=2s$$

از یکطرف واضح است که s بکعدد مثبت میباشد و از طرف دگر $s=2s$ درنتیجه $1=2$ بدست می آید که غیر ممکن است و اما میدانیم که این سلسله متقارب مطلق نیست.

سلسلهء غالب *(Dominated Series)* . سلسلهء تابعی $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ درناحیهء معین از قیمت های x را، سلسلهء غالب مینامند، درصورتیکه برای تمام قیمت های x ازین ناحیه، یک سلسلهء عددی متقارب دارای

عناصرمثبت $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ وجودداشته باشد طوریکه

$$|u_n(x)| \le \alpha_n \quad , \quad (n=1,2,3.4.5.....)$$

هر سلسلهء غالب در ناحیهء مربوطه اش، متقارب است .

مثال 27. سلسلهء $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ درناحیهء $(-\infty , \infty)$ یک سلسلهء غالب است، زیرا که برای هر عدد حقیقی x غیر مساوات

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad , \quad (n = 1,2,3,4,.....)$$

صدق میکند و سلسلهء $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقارب می باشد .

5. سلسلهء طاقت(Power Series)

سلسلهء طاقت عبارت از سلسلهء تابعی

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(x-a\right)^k = a_0 + a_1\left(x-a\right) + a_2\left(x-a\right)^2 + \cdots$$

است، درحالیکه ضرایب a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... ، a_k اعداد حقیقی باشند . درصورت $a = 0$ سلسله طاقت حالت ذیل را دارد:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

قضیه(تقارب سلسله طاقت) . برای سلسله طاقت $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ یکی از سه شرط ذیل صدق مینماید:

1. سلسه برای تمام قیمت های x متقارب است .
2. سلسله فقط برای $x = 0$ متقارب میباشد.
3. این سلسله مطلق متقارب است برای هـر x ا زیک انتروا ل $\left(-R , R\right)$ و متباعد است برای $|x| > R$. ددرحالات $x = R$ و $x = -R$ سلسله میتواند متباعد یا متقارب باشد.

ثبوت :

با درنظرداشت $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ ، $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho$ ، $R = \frac{1}{\rho}$ و

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||x| = \rho|x|$$

واضح است که سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}u_k = \sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k$ مطلق متقارب است درصورتیکه شرط ذیل صدق کند

$$\rho|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\rho} \Rightarrow |x| < R \Rightarrow x \in (-R\,,\,R)$$

بعبارت د گرسلسله متقارب است اگر

$$|x| < R = \frac{1}{\rho} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

بنابرین سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k$ برای $|x| < R$ متقارب و برای $|x| > R$ متباعد است. هرگاه $\rho = 0 \Leftrightarrow R = \infty$ ، این سلسله برای هر قیمت x و در حالت $\rho = \infty \Leftrightarrow R = 0$ سلسله فقط برای $x = 0$ متقارب میباشد •

شعاع تقارب و ناحیه تقارب. عدد حقیقی R شعاع تقارب سلسله طاقت $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ گفته میشود درصورتیکه این سلسله برای هر عدد x از انتروال $(-R\,,\,R)$ متقارب و در حالت $|x| > R$ متباعد باشد، شعاع تقارب صفر و یا بینهایت نیز بوده میتواند.

دیدیم که شعاع تقارب طبق معیارنسبت عبارت از $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ است، بهمین قسم با در نظر معیار جذری میتوان نشان داد که $R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ میباشد .

ست تمام اعداد x که درانهاسلسله طاقت متقارب باشد، بنام ناحیه تقارب یاد میگردد. ناحیه تقارب یکی از حالات ذیل را دارد:

$$(-R\,,\,R) \quad , \quad [-R\,,\,R] \quad , \quad [-R\,,\,R) \quad , \quad (-R\,,\,R]$$

جهت تعیین تقارب سلسله طاقت در انجام های ناحیه تقارب در سلسله $x = \pm R$ وضع نموده تقارب و تباعد ان ارزیابی میگردد. شعاع تقارب سلسله $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ شرط $|x-a| < R$ را صدق مینماید .

مثال28 : شعاع تقارب و ناحیه تقارب سلسله $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ را تعیین کنید.

حل: برا ی $a_k = \frac{1}{k!}$ داریم

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)!}{k!} \right| = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$$

بنابرین سلسله برای هـر عدد حقیقی x متقارب است یعنی شعاع تقارب $R = \infty$ وناحیه تقارب $(-\infty , \infty)$ میباشد•

مثال 29: شعاع تقارب و ناحیه تقارب سلسله $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$ را تعیین کنید.

حل: برای $a_k = k!$ میابیم که

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

پس سلسله برای هـرعدد حقیقی $x \neq 0$ متباعد است یعنی شعاع تقارب $R = 0$ و سلسله فقط برای $x = 0$ متقارب میباشد.

مثال30: شعاع تقارب و ناحیه تقارب سلسله $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ را تعیین کنید.

حل: با درنظر داشت $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ میابیم که

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \right| = 1$$

بنابرین سلسله برای هـر عدد حقیقی $|x| < 1$ متقارب است یعنی شعاع تقارب $R = 1$ است و اما تقارب سلسله را برای $x = \pm 1$ ارزیابی مینماییم:

این سلسله برای $x = -1$ عبارت ا ز $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ میباشد که متقارب است و برای $x = 1$ سلسله $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ بدست می آید و متباعد است، پس ناحیه تقارب سلسله، انتروال $[-1, 1)$ میباشد.

مثال 31: شعاع تقارب و ناحیه تقارب سلسله $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{3^k}$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به ترادف $a_k = \frac{1}{3^k}$ میابیم که

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{3^{k+1}}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3^{k+1}}{3^k}\right| = 3$$

بنابرین شعاع تقارب این سلسله عبارت از $R = 3$ میباشد و ناحیه تقارب قرار ذیل تعیین میگردد:

$$\frac{1}{3}|x+1| < 1 \Rightarrow |x+1| < 3 \Rightarrow -3 < x+1 < 3 \Rightarrow -4 < x < 2$$

ارزیابی سلسله در نقاط انجام:

$$x = -4 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4+1)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$$

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2+1)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}1^k$$

هردو سلسله $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ و $\sum_{k=1}^{\infty}1^k$ متباعد ا ند بنابرین ناحیه تقارب سلسله فوق عبارت از انتروال $(-4, 2)$ میباشد.

قضیه آ بل *(Abels Th.)*

1. هرگاه سلسلهء طاقت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ برای عددغیرصفری x_0 متقارب باشد، این سلسله برای تمام x های که شرط $|x| < |x_0|$ را صدق کند نیز متقارب است.

2. درصورتیکه سلسلهء مذکور برای عدد غیر صفری x_0 متباعد باشد، این سلسله برای تمام x های که شرط $|x| > |x_0|$ را صدق کند نیز متباعد می باشد.

ثبوت : با درنظر داشت معیار مقایسوی اثبات قضیه واضح است •

مثال32. شعاع تقارب و انتروال تقارب سلسلهء $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ را تعیین کنید .

حل :

$$a_n = \frac{1}{(n+1)2^n} \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^n\, 2^n}}{\frac{1}{(n+2)}\, 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\,2^{n+1}}{(n+!)\,2^2} = 2$$

چون شعاع تقارب $R = 2$ است لذا سلسله در انتروال $(-2\ ,\ 2)$ متقارب است. برای $x = \pm 2$ سلسله حالات ذیل را اختیار مینماید .

$$x = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

دیده می شود که برای $n = 2$ سلسله هارمونیک بوده متباعد است و

$$x = -2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

بنابرین برای $n = -2$ سلسله متناوب و متقارب میباشد. درنتیجه ساحه تقارب سلسله فوق انتروال $[-2\ ,\ 2\ )$ است .

مشتق و انتگرال سلسله طاقت. اگر شعاع تقارب سلسله طاقت $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ عبارت از R باشد، مشتق و یا انتگرال این سلسله بحیث یک تابع در انتروال تقارب مطلق $-R < x < R$

از مجموع مشتقات و یا انتگرالهای تمام حدود آن بحیث سلسله های جدید بدست می آیند، بعبارت دیگر

هرگاه $f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ برای $|x|<R$ متقارب باشد، درانصورت برای $|x|<R$ مشتق و انتگرال این تابع عبارت اند از

$$f'\left(x\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}ka_k x^{k+1}$$

$$\int f\left(x\right)dx = \int\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\right)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}+C$$

مثال33 : مشتق تابع $f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ را دریافت نمایید.

حل : این سلسله برای تمام اعداد حقیقی x متقارب است، پس

$$f'\left(x\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)'=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)'=0+1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\frac{4x^3}{4!}+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=f\left(x\right)$$

قضیه(یکتابودن سلسلهء طاقت). هـرگاه تابع بینهایت مرتبه مشتق پذیر f برای $-R<x-c<R$ بحیث سلسله طاقت

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k$$

ارایه گردد، درینصورت ارایه فوق فقط یکتاست ، طوریکه

$$a_k=\frac{f^{(k)}\left(c\right)}{k!} \quad , \quad k=0\,,1\,,2\,,3\,,\cdots$$

ثبوت:

$$f\left(x\right)=a_0+a_1\left(x-c\right)+a_2\left(x-c\right)^2+\ \cdots\ \Rightarrow f\left(c\right)=a_0\Rightarrow a_0=\frac{f\left(c\right)}{0!}$$

$$f'\left(x\right)=a_1+2a_2\left(x-c\right)+3a_3\left(x-c\right)^2+\cdots\Rightarrow f'\left(c\right)=a_1\Rightarrow a_1=\frac{f'\left(c\right)}{1!}$$

بهمین قسم

• $$f'''\left(c\right)=3!a_3\Rightarrow a_3=\frac{f'''\left(c\right)}{3!}\qquad\cdots\qquad f^{(k)}\left(c\right)=k!a_k\Rightarrow a_k=\frac{f^{(k)}\left(c\right)}{k!}$$

6. سلسله های تایلور– مکلورین

هرگاه تابع $f(x)$ و مشتقات $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f'''(x)$ و $f^{(n)}(x)$ موجود بوده در انتروال $[a\ ,\ b]$ متمادی باشند، بعلاوه $f^{(n+1)}(x)$ در انتروال $(a\ ,\ b)$ وجود داشته باشد، پس برای عدد c از $[a\ ,\ b]$ تابع $f(x)$ قرار ذیل ارایه میگردد:

$$f(x)\ =\ p_n(x)\ +\ R_n(x)$$

درحالیکه

$$p_n(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+f''(c)(x-c)^2+...+f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

و $R_n(x)$ (بقیه تایلور) به سه شکل ذیل ارایه شده میتواند :

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}$$ (ارایه لاگرانژ)

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-c)$$ (ارایه کوشی)

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_c^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$ (فورم انتیگرالی)

عدد ξ دربین c و x واقع است . $p_n(x)$ پولینوم تایلورگفته میشود .

درصورتیکه تابع $f(x)$ بینهایت دفعه مشتق پذیر باشد، بحیث سلسلهٔ تایلور ارایه میگردد، اگر و تنها اگر

$$f(x)\ =\ p_n(x)\ +\ R_n(x)\ \ ,\ \ \lim_{n\to\infty}R_n\left(x\right)=0\ \ ,\ \ \forall x\in\left(a\ ,\ b\right)$$

درینحالت سلسله تایلور عبارت است از

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$ (سلسلهء تایلور)

و برای $c=0$ سلسلهء مکلورین (حالت خاص سلسلهء تایلور) بدست می آید:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ (سلسلهء مکلورین)

و $f(x)$ **تابع تحلیلی** گفته میشود ، اگردر یک انتروال باز، بحیث سلسلهء تایلور ارایه شده بتواند .

مثال34. سلسلهء مکلورین را برای تابع $f(x)=e^x$ مینویسیم :

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=...=f^{(n)}(x)=e^x$$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=...=f^{(n)}(0)=1$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

و برای $e^{\zeta}<e^x$

$$R_n(x)=\frac{e^{\zeta}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad,\quad e^{\zeta}<e^x$$

ازینجا

$$|R_n(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ ,\ x\le 0\quad,\quad |R_n(x)|\le e^x\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ ,\ x>0$$

در نتیجه $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ و سلسله ماکلورین برای $f(x)=e^x$ متقارب میباشد و

$$\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\quad\bullet}$$

مثال35. سلسله تایلور را برای تابع $f(x)=\sin x$ بنویسید.

حل: تابع ، مشتقات و قیمت های آنها عبارت اند از

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \quad , \quad f'(x) = \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \quad , \quad f'''(x) = -\cos x \\ &\vdots \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x \quad , \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \\ \Rightarrow f^{(2k)}(0) &= 0 \quad , \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \quad , \quad k = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

بنابرین عناصر سلسله مطلوب فقط دارای توان های تاق میباشد و طبق دستور داریم

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x)$$

و چون قیمت مطلق مشتق هر مرتبه از تابع $f(x) = \sin x$ از یک بزرگتر نیستند پس باقیمانده تیلور بر اساس فورمول لاگرانژ قرار ذیل تحمین میگردد.

$$\left|R_{2k+1}(x)\right| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_{2k+1}(x) \le \lim_{n\to\infty} \left|R_{2k+1}(x)\right| = 0$$

در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2k+1}(x) = 0$ و سلسله ماکلورین برای $f(x) = \sin x$ متقارب میباشد و

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \bullet}$$

مثال36. سلسله ماکلورین را برای تابع $\cos x$ بنویسید.

حل: مشابه سلسله ماکلورین تابع $\sin x$ برای cox سلسله با عناصر دارای توانهای جفت بدست می آید:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x)$$

و چون قیمت مطلق مشتق هر مرتبه از تابع cox از یک بزرگتر نیستند پس باقیمانده تیلور بر اساس فورمول لاگرانژ قرار ذیل تخمین میگردد.

$$\left|R_{2k}\left(x\right)\right| \le 1\cdot\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_{2k}\left(x\right) \le \lim_{n\to\infty}\left|R_{2k}\left(x\right)\right| = 0$$

در نتیجه سلسله تایلور– ماکلورین برای cox متقارب میباشد و

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \quad \bullet}$$

فورمول اویلر. سلسله های که تا حال تحت مطالعه قرار دادیم دارای عناصر از اعداد حقیقی اند، البته سلسله های با عناصری از اعداد مختلط نیز وجود دارند که تفصیل آن از حدود بحث ما خارج است و فقط با اتکای مثالهای قبلی فورمول اویلر مطرح میگردد، چنانچه میدانیم

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

حال اگر درین رابطه $x=\theta i$ وضع گردد درحالیکه $\theta\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$ میابیم که

$$e^{i\theta} = 1+\frac{\theta i}{1!}+\frac{(\theta i)^2}{2!}+\frac{(\theta i)^3}{3!}+\frac{(\theta i)^4}{4!}+\frac{(\theta i)^5}{5!}+\frac{(\theta i)^6}{6!}+\cdots$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{i^2\theta^2}{2!}+\frac{i^3\theta^3}{3!}+\frac{i^4\theta^4}{4!}+\frac{i^5\theta^5}{5!}+\frac{i^6\theta^6}{6!}+\cdots$$

چون $i^2=-1$ ، $i^3=ii^2=-i$ ،$i^4=i^2i^2=1$ ،$i^5=ii^4=i$ و $\cdots$ ، پس

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1+\frac{i\theta}{1!}-\frac{\theta^2}{2!}-\frac{i\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\frac{i\theta^5}{5!}-\frac{\theta^6}{6!}-\cdots$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)$$

میدانیم که

$$1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots = \cos\theta \quad , \quad \theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots = \sin\theta$$

درنتیجه

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$$

§7. سلسله بینوم($Binomial\ series$)

اگر p یک عدد حقیقی و $-1<x<1$ باشد، درانصورت

$$(1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}x^k$$

درحالیکه $\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}$ و k عدد طبیعی است.

ثبوت: مطابق دستور، سلسله ماکلورین را برای تابع $f(x)=(1+x)^p$ دریافت میکنیم:

$$f(x)=(1+x)^p \quad\Rightarrow\quad f(0)=1$$

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1} \quad\Rightarrow\quad f'(0)=p$$

$$f''(x)=p(p-1)(1+x)^{p-2} \quad\Rightarrow\quad f''(0)=p(p-1)$$

$$f'''(x)=p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3} \Rightarrow f'''(0)=p(p-1)(p-2)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=p(p-1)\cdots(p-n+1)(1+x)^{p-n}\Rightarrow f^{(n)}(0)=p(p-1)\cdots(p-n+1)$$

با درنظرداشت قیمت های $f(0)$ ، $f'(0)$، $f''(0)$، $f'''(0)$ و غیره در سلسله داریم

- $$(1+x)^p=f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}x^k \quad , \quad -1<x<1$$

بعضی سلسله های بینومیل و لوگارتمی. برای عدد حقیقی t طوریکه $|t|<1$ باشد، سلسله هندسی ذیل را درنظر میگیریم.

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+t^4+\cdots+t^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}t^k \qquad (i)$$

درین سلسله اگر عوض t عدد $-t$ وضع گردد داریم.

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \qquad (ii)$$

در سلسله اخیر t را به t^2 وضع کرده میابیم که

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \qquad (iii)$$

و بالآ خره در سلسله (ii)متحول t را به $t-1$ تعویض میکنیم برای $0<t<2$سلسله ذیل حاصل میشود:

$$\frac{1}{t} = 1 - (t-1) + (t-1)^2 - (t-t)^3 + \cdots \qquad (iv)$$

ا کنون اطراف روابط (i) و (ii) را درانتروال $[0, x]$انتگرال میگیریم.

$$ln|1-x| = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\Rightarrow ln|1-x| = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad (v)$$

بهمین قسم

$$ln|1+x| = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\Rightarrow ln|1+x| = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad (vi)$$

روابط (v)و (vi) راطرف بطرف تفریق نموده داریم

$$\boxed{\Rightarrow ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right] \qquad (vii)}$$

اگر اطراف رابطه (iv)ا نتگرال گرفته شود داریم

$$\ln|x| = \int_0^x \frac{dt}{t} = \int_0^x \left[1 - (t-1) + (t-1)^2 - (t-t)^3 + \cdots \right] dt$$

$$\ln|x| = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \cdots \quad , \quad 0 < x < 2 \quad (viii)$$

سلسله *arctan*. سلسله (iii)را درنظر میگیریم.

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots$$

از انتگرال گرفتن اطراف این رابطه در انتروال$[0, 1]$ بدست می آید که

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots\right) dt$$

و یا

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \quad (ix)}$$

سلسله *arcsin* . با استفاده از قضیه بینوم $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$را قرار ذیل انکشاف داد

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \binom{-\frac{1}{2}}{0}\left(t^2\right)^0 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}\left(t^2\right)^1 + \binom{-\frac{1}{2}}{2}\left(t^2\right)^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}\left(t^2\right)^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6 + \cdots$$

از انتگرال گرفتن اطراف رابطه اخیر میابیم.

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6 + \cdots\right) dt$$

ازینجا بدست می آید که

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1\cdot x^2}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^2}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots \quad (x)}$$

8. استفاده ازسلسله های ریاضی درمحاسبه

در محاسبه اعداد غیرناطق، قیمت های توابع ، انتگرال گیری بعضی توابع مهم و معادلات تفاضلی ازسلسله های ریاضی بروش های بسیار جالب و مفید استفاده بعمل می آید، درینجا چند نمونه از ذیل را درنظر میگیریم .

محاسبه عدد اویلر. عدد اویلر (e) از سلسله ذیل محاسبه میشود:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots$$

اگر پولینوم تایلور $P_n(x)$ را بحیث قیمت تقریبی e^x درنظر گیریم درینصورت داریم

$$e^{x}\approx 1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}=P_{n}(x)$$

درین حالت

$$e^{x}=P_{n}(x)+R_{n}(x)\quad,\quad R_{n}(x)=\frac{e^{\zeta}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad,\quad 0<\zeta<1$$

حال اگر $n=5$ و $x=1$ انتخاب گردد عدد e با خطای محاسبه قرار ذیل تخمین میشود:

$$e^{x}\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=2.716667$$

درحالیکه خطای محاسبه عبارت است از

$$R_{5}(1)=\frac{e^{\zeta}}{(5+1)!}(1)^{5+1}<\frac{e}{6!}<\frac{3}{6!}\approx 0.004167$$

بنابرین

$$2.726667-0.004167<e<2.726667-0.004167$$
$$\Rightarrow 2.712500<e<2.720834$$

دیده میشود که با درنظر گرفتن شش عنصر سلسله مربوطه عدد e تا دو رقم بعد از اعشاری طور دقیق محاسبه میشود، بهر اندازه که تعداد عناصر سلسله بیشتر انتخاب گردد، خطای مربوط کمتر و محاسبه دقیقتر میباشد. عدد مذکور تا ده رقم بعد از اعشاری عبارت است از

$$\boxed{e\approx 2.7182818285}$$

محاسبه عدد π بروش گریگــوری. دریـن روش از سلسـله $\arctan x$ قـرار ذیـل استفاده میشود:

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

درین سلسله $x = 1$ وضع نموده میابیم که

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$$

$$\boxed{\Rightarrow \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots\right)}$$

رابطه اخیر بنام فورمول لایپ نیتس یاد میشود. تقارب این سلسله عددی بطی است چنانچه اگر 50 حد از ان درنظر گرفته شود عدد π قرار ذیل بدست می آید.

$$\Rightarrow \pi \approx 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots - \frac{1}{49} + \frac{1}{50}\right) = 3.14159265359$$

این روش را اولین بار ریاضی دان انگلیسی بنام جیمزگریگوری *(Jams Gregory)* کـه در سالهای *1638- 1675* میزیست، ارایه داد و بعدها لایپ نیـتس ریاضـی دان المـانی روش مذکور را کمب بهتر فورمولیزه کرد .

محاســبه عــدد π بــروش جــان مکــین. ایـن روش را ریاضـی دانـی بنـام جـان مکین *(Johan Machin)* در سال *1706* مطرح نمود و اساس کار آن بر فورمول مثلثاتی ذیل استوار است.

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$$

مطابق این فورمول میتوان نوشت

$$\arctan 1 + \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{1+\frac{1}{239}}{1-1\cdot\frac{1}{239}} = \arctan\frac{120}{119}$$

$$\Rightarrow arctan\,1 + arctan\frac{1}{239} = arctan\frac{120}{119} \quad \cdots \quad (I)$$

بهمین قسم

$$4\,arctan\frac{1}{5} = 2\left(arctan\frac{1}{5} + arctan\frac{1}{5}\right) = 2\,arctan\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}$$

$$= 2\,arctan\frac{5}{12} = \left(arctan\frac{5}{12} + arctan\frac{5}{12}\right) = arctan\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}} = arctan\frac{120}{119}$$

$$\Rightarrow 4\,arctan\frac{1}{5} = arctan\frac{120}{119} \quad \cdots \quad (II)$$

از مقایسه (I) و (II) بدست می آید.

$$arctan\,1 + arctan\frac{1}{239} = 4\,arctan\frac{1}{5}$$

با درنظرداشت رابطه اخیر و سلسله $arctan\,x$ داریم که

$$\frac{\pi}{4} = arctan\,1 = 4\,arctan\frac{1}{5} - arctan\frac{1}{239}$$

ازینجا

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{5}\right)^5 - \cdots\right] - \left[\tfrac{1}{239} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{239}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{239}\right)^5 - \cdots\right]$$

درنتیجه سلسله مکین عبارت است از

$$\boxed{\Rightarrow \pi = 16\left[\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{5}\right)^5 - \cdots\right] - 4\left[\tfrac{1}{239} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{239}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{239}\right)^5 - \cdots\right]}$$

سلسله مکین دارای سرعت تقارب خیلی بهتر نسبت به فورمول لایپ نیتس میباشد، چنانچه اگر هفت حد اول هر یک ازین سلسله ها انتخاب گردد عدد π قرار ذیل بدست می آید.

$$\boxed{\pi \approx 3.141592654}$$

درحالیکه معادل همین قیمت از محاسبه پنجاه حد سلسله گریگوری – لایپ نیتس حاصل شده بود بنابرین روش فوق درین محاسبه عملی و مفید است.

مثال37 . بروش جان مکین میتوان عدد π را قرار ذیل نیز محاسبه نمود:

$$arctan\frac{1}{2}+arctan\frac{1}{3}=arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=arctan\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=arctan\,1$$

$$\Rightarrow arctan\,1=arctan\frac{1}{2}+arctan\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}=arctan\,1=\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5-\cdots\right]+\left[\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5-\cdots\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow\pi=4\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5-\cdots\right]+4\left[\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5-\cdots\right]}$$

سلسله های مربوطه رابطه اخیر برای محاسبه عدد π نیز دارای سرعت مناسب میباشد و استفاده از آن مفید است.

مثال38. انتیگرال $\int_0^1\frac{sin\,x}{x}dx$ را محاسبه کنید.

حل: با درنظرداشت سلسله مربوط تابع ساین داریم که

$$\int_0^1\frac{sin\,x}{x}dx=\int_0^1\frac{1}{x}sin\,x\,dx=\int_0^1\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)dx=x-\frac{x^3}{3\cdot3!}+\frac{x^5}{5\cdot5!}-\frac{x^7}{7\cdot7!}+\cdots\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{sin\,x}{x}dx=1-\frac{1}{3\cdot3!}+\frac{1}{5\cdot5!}-\frac{1}{7\cdot7!}+\cdots\approx0.946\,083\quad\bullet$$

مثال39. انتیگرال $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ را محاسبه کنید.

حل: در سلسله مربوط تابع e^x عوض x افاده $-x^2$ را تعویض نموده داریم.

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+\frac{x^{12}}{6!}\cdots$$

با انتگرال گرفتن اطراف این رابطه میتوانی نوشت که

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{10}}{5!}+\frac{x^{12}}{6!}\cdots\right)dx$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}+\frac{x^{13}}{13\cdot 6!}\cdots\right]_0^0$$

$$\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\frac{1}{11\cdot 5!}+\frac{1}{13\cdot 6!}=0.747\cdot$$

9. تمرین

کدام یک ا زسلسله های ذیل متقارب است؟ درصورت تقارب مجموع آنها را دریافت کنید.

$$1.\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k \quad , \quad 2.\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)^k \quad , \quad 4.\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{3^k} \quad , \quad 5.\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(-3)^k}$$

$$6.\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^k \quad , \quad 7.\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{2^k} \quad , \quad 8.\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{5^{2k+1}} \quad , \quad 9.\ \sum_{k=0}^{\infty}e^{-0.2k}$$

$$10.\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\cdots \quad , \quad 11.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{4^{k+2}} \quad , \quad 12.\ \sum(-1)^k\frac{2^{k+1}}{3^{k-3}}$$

تقارب و یا تباعد سلسله های ذیل را معین کنید:

$$13.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \quad , \quad 14.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{100}{\sqrt{k}} \quad , \quad 15.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \quad , \quad 16.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k\sqrt{k}}$$

با استفاده از معیار انتگرال تقارب و یا تباعد هر یک از سلسله های ذیل را معین کنید:

$$17.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2+3k)^2} \quad , \quad 18.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k} \quad , \quad 19.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^k} \quad , \quad 20.\ \sum_{k=1}^{\infty}ke^{-k^2}$$

با استفاده از معیار تباعد، متباعد بودن هر یک از سلسله های ذیل را معین کنید:

$$21.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+1} \quad , \quad 22.\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} \quad , \quad 23.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}} \quad , \quad 24.\ \sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{1}{k}}$$

تقارب هریک از سلسله های ذیل را ارزیابی نمایید:

$$25.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}\quad,\quad 26.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\quad,\quad 27.\ \sum_{k=1}^{\infty}k^{-\frac{3}{4}}\quad,\quad 28.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{e^k}$$

$$29.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}\quad,\quad 30.\ \sum_{k=1}^{\infty}k\sin\frac{1}{k}\quad,\quad 31.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^k+e^{-k}}\quad,\quad 32.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{e^k}$$

تقارب و یا تباعد هر یک از سلسله های ذیل را با مقایسه سلسله های هندسی و دیریکله ارزیابی کنید:

$$33.\ \sum_{k=1}^{\infty}\cos^k\left(\frac{\pi}{6}\right)\quad,\quad 34.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\quad,\quad 35.\ \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{k}}\quad,\quad 36.\ \sum_{k=1}^{\infty}e^k$$

تقارب هر یک از سلسله های ذیل را بروشهای نسبت و جذر ارزیابی کنید:

$$37.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\quad,\quad 38.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{2^{3k}}\quad,\quad 39.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}\quad,\quad 40.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{100}}{e^k}$$

$$41.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}\quad,\quad 42.\ \sum_{k=1}^{\infty}k^2\,2^{-k}\quad,\quad 43.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k^2}\quad,\quad 44.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\,k!}{k^k}$$

تقارب مطلق، مشروط و یا تباعد هر یک از سلسله های ذیل ارزیابی کنید:

$$45.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{k^2+1}\quad,\quad 46.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{2k+1}\quad,\quad 47.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{\frac{3}{2}}}\quad,\quad 44.\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^2}{e^k}$$

ساحه تقارب سلسله های ذیل را تعیین کنبد :

$$45.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n\quad,\quad 46.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n+1}\quad,\quad 47.\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2 3^n(x-3)x^n\quad,\quad 48.\ \sum_{n=1}^{\infty}2n(3x)^{3n}$$

شعاع تقارب هریک ا زسلسله های ذیل را دریافت کنید:

$$49.\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!x^k}{k^k}\quad,\quad 50.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k!)^2x^k}{(2k)!}\quad,\quad 51.\ \sum_{k=1}^{\infty}k(ax)^k\quad,\quad 52.\ \sum_{k=1}^{\infty}(a^2x)^k$$

توابع ذیل را به سلسلهء ماکلورین انکشاف دهید:

$53.\quad f(x)=e^{-2x} \quad , \quad 54.\quad g(x)=\dfrac{1}{1+x} \quad , \quad 55.\quad h(x)=(1+x)^{10}$

مقادیر مجموع های قسمی S_1 ، S_2، S_3،... و S_n رادرسلسله های ذیل محاسبه کنید :

$56.\quad \dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{1}{5^4}+\ldots\ldots \qquad 57.\quad \dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\dfrac{1}{4.5}+\ldots..$

نشان که سلسله های ذیل متباعد اند :

$58.\quad \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{9}+\cdots \qquad 59.\quad \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{8}+\dfrac{15}{16}+\cdots$

سلسله های ذیل متقارب اند؟ یا متباعد؟

$60.\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n} \qquad 61.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right)$

ساحه تقارب سلسله های ذیل را تعیین کنید :

$62.\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n \quad , \quad 63.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

مآخذ

1- آپوستل ، ت. م1372 آنالیز ریاضی ترجمه عالم زاده، ع.ا. موء سسهء انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپخانه دانشگاه صنعتی شریف. چاپ سوم، تهران، صفحات 569 – 486.

2- استوارت، ج . 1376 حسابگان دیفرانسیل و انتیگرال جلد سوم، ترجمهء علامت ساز، م . ا. محمدی، ع.ا. دانشگاه اصفهان، صفحات 1210، 1233 , 1313.

3- رودین، و . 1379، اصول آنالیز ریاضی، ترجمه عالم زاده، ع.ا.، انتشارات علمی و فنی، چاپ دوازدهم، تهران، صفحات 247 – 296 .

4- علیخانی، ع.ا و میرمیرانی، م. 1380، آنالیز ریاضی، انتشارات ارکان، اصفهان، صفحات 210 – 208.

5- محسنی، محمود مقدم، آنالیز ریاضی، انتشارات دانشگاه شهید باهنر، ایران، تهران1383.

6- رضایی، محبوبه، آنالیز ریاضی، انتشارات دانشگاه اصفهان، ایران، تهران 1382.

7- *Apostol, T. M. . 1975 , Mathematical Analysis ,Addison Vesley Publishing Company, Reading Massachusetts, USA , , pp350 -520 .*

8- *Barnet , R.A. , Ziegler , M.R. Byleen, K.E. 1999, Calculus , Prentice Hall , New Jersy ,pp.361 - 416 .*

9- *Bermant, A. I. and Aramanovich I.G. 1979, Mathematical Analysis, Mir Publishing, Moscow,, pp. 258 – 343 , 365 – 568 .*

10- *Burzynski, D. and Sanders G.D. 1995, Applied Calculus , PWS Publishing Company , Boston USA,. pp. 450-536 .*

11- *Demidovich, B.; 1981, Problems Mathematical Analysis, Mir Pub. Moscow, , pp. 180 – 318 .*

12- *Demidovich, B.P. and. Maron I.A . 1981, Computational Mathematics .Mir Publishers .Moscow, pp.127 -135 , 229 -269..*

13- *Rudin, W. 1976, Principles of mathematical Analysis, 3rd Edition. Mc Graw - Hill, New York, , p . 160 – 185 .*

14- *Thomos ,G.B .and Finny ,R.L. 1996 , Calculus and Analytic Geometry , Addison – Wessley ,New York , USA , PP.1001 - 1134 .*